Chapitre 3

Marches aléatoires. Filtration et information

A coté des modèles dynamiques *déterministes*, c'est-à-dire pour lesquels les quantités étudiées ont une évolution gouvernée par une équation différentielle ou une équation récurrente dont la connaissance fournit une prédiction *certaine* de ses valeurs futures, il existe des modèles dynamiques *stochastiques*, souvent plus pertinents ; les plus simples sont les *marches aléatoires* qui font l'objet de cette leçon. Dans le cas d'une marche aléatoire, l'évolution future d'une quantité observée, le cours d'un titre, un indice, un taux, n'est plus constituée d'une trajectoire unique mais de n trajectoires possibles dont une seule se réalisera. L'ensemble des trajectoires possibles est muni d'une probabilité qui pourrait représenter la probabilité que la trajectoire se réalise, mais ce ne sera pas notre point de vue ici, et qui représentera le prix ou le coût qu'il convient d'attacher à la réalisation de cette trajectoire en terme de risque : c'est le point de vue auquel nous a conduit l'introduction de la probabilité de calcul.

3.1 Définitions et exemples

Définition : Soient Ω un ensemble fini, $\mathcal{F}$ une sous-tribu de $\mathcal{P}(\Omega)$, $(\Omega, P, \mathcal{F})$ une espace probabilisé fini et soit $\mathbb{T} = \{0, \delta t, \ldots, n\delta t = T\}$, où $\delta t > 0$ est un réel fixé (petit). On appelle *marche aléatoire (finie)* une application (X) mesurable

$$X : \Omega \times \mathbb{T} \to \mathbb{R}$$

Oublions provisoirement l'adjectif "mesurable" dont nous préciserons le sens plus loin et étudions tout d'abord un exemple :

Exemple : Le modèle CRR que nous avons déjà étudié fournit un premier exemple de marche aléatoire : elle modélise la dynamique de l'actif sous-jacent à une option. L'espace probabilisé fini Ω considéré est l'ensemble à 2^n élements $\Omega = \{-1, 1\}^n$; un évènement $\omega \in \Omega$ est une suite finie de ± 1 qui représentent la succession des n mouvements vers le haut (up) ou vers le bas (down) de l'actif. En introduisant la probabilité de calcul, nous avons posé, pour un $\omega \in \Omega$ qui comporte j composantes égales à $+1$ (et $(n-j)$ égales à -1),

$$P(\omega) := p^j (1-p)^{n-j},$$

faisant implicitement une hypothèse d'indépendance des accroissements sur laquelle nous reviendrons. La tribu $\mathcal{F}$ est ici simplement la tribu pleine $\mathcal{F} = \mathcal{P}(\Omega)$. La marche aléatoire CRR, notée (S) est définie sur $\Omega \times \mathbb{T}$ par la formule suivante, lorsque ω comporte j composantes égales à $+1$ et $t = i\delta t$:

$$(\omega, t) \mapsto S_t(\omega) : := S_0 u^j d^{i-j}.$$

Il y a deux façons de voir une marche aléatoire (X) et c'est précisément ce qui fait la richesse de cette notion :

1. Si on fixe un $\omega \in \Omega$, l'application $\mathbb{T} \to \mathbb{R}$ qui à $t \in \mathbb{T}$ associe $X_t(\omega)$ est une fonction de t qu'on appelle la *trajectoire* de l'*état du monde* ω et qui représente l'une des évolutions au cours du temps

de la quantité modélisée, celle qui correspond à ω. On peut munir chaque trajectoire $t \mapsto X_t(\omega)$ d'une probabilité en posant

$$P(t \mapsto X_t(\omega)) := P(\overline{\omega})$$

où $\overline{\omega}$ est l'ensemble des $\omega \in \Omega$ qui conduisent à la même trajectoire. Une marche aléatoire peut donc être vue comme *un espace probabilisé de trajectoires*. Par exemple dans le modèle CRR à $n = 3$ étapes, l'espace Ω comporte 8 évènements élémentaires, $\omega_1 = (+1, +1, +1)$, $\omega_2 = (+1, +1, -1)$, $\omega_3 = (+1, -1, +1)$, $\omega_4 = (+1, -1, -1)$, $\omega_5 = (-1, +1, +1)$, $\omega_6 = (-1, +1, -1)$, $\omega_7 = (-1, -1, +1)$, et $\omega_8 = (-1, -1, -1)$ et il y a 8 trajectoires notées γ_i :

$$\begin{array}{rcl}
\gamma_1 &=& \big((S_0, 0)\ ; (\delta t, S_0 u)\ ; (2\delta t, S_0 u^2)\ ; (3\delta t, S_0 u^3)\big) \\
\gamma_2 &=& \big((S_0, 0)\ ; (\delta t, S_0 u)\ ; (2\delta t, S_0 u^2)\ ; (3\delta t, S_0 u^2 d)\big) \\
\gamma_3 &=& \big((S_0, 0)\ ; (\delta t, S_0 u)\ ; (2\delta t, S_0 ud)\ ; (3\delta t, S_0 u^2 d)\big) \\
\gamma_4 &=& \big((S_0, 0)\ ; (\delta t, S_0 u)\ ; (2\delta t, S_0 ud)\ ; (3\delta t, S_0 ud^2)\big) \\
\gamma_5 &=& \big((S_0, 0)\ ; (\delta t, S_0 d)\ ; (2\delta t, S_0 ud)\ ; (3\delta t, S_0 u^2 d)\big) \\
\gamma_6 &=& \big((S_0, 0)\ ; (\delta t, S_0 d)\ ; (2\delta t, S_0 u^2)\ ; (3\delta t, S_0 ud^2)\big) \\
\gamma_7 &=& \big((S_0, 0)\ ; (\delta t, S_0 d)\ ; (2\delta t, S_0 d^2)\ ; (3\delta t, S_0 ud^2)\big) \\
\gamma_8 &=& \big((S_0, 0)\ ; (\delta t, S_0 d)\ ; (2\delta t, S_0 d^2)\ ; (3\delta t, S_0 d^3)\big)
\end{array}$$

2. Si on fixe un $t \in \mathbb{T}$, l'application $\Omega \to \mathbb{R}$ qui à $\omega \in \Omega$ associe $X_t(\omega)$ est une variable aléatoire; la marche aléatoire définit donc pour chaque t une v.a.. On peut donc aussi voir une marche aléatoire comme *une famille à un paramètre* t de v.a.. Dans l'exemple du modèle CRR à 3 étapes, ces v.a. sont S_0 (qui est la v.a. certaine égale à la constante S_0), $S_{\delta t}$, $S_{2\delta t}$ et $S_{3\delta t}$ dont les lois sont données respectivement par les tableaux suivants :

$S_{\delta t}$	$S_0 d$	$S_0 u$
$P(S_{\delta t} = \cdot)$	$(1-p)$	p

$S_{2\delta t}$	$S_0 d^2$	$S_0 du$	$S_0 u^2$
$P(S_{2\delta t} = \cdot)$	$(1-p)^2$	$2p(1-p)$	p^2

$S_{3\delta t}$	$S_0 d^3$	$S_0 d^2 u$	$S_0 du^2$	$S_0 u^3$
$P(S_{3\delta t} = \cdot)$	$(1-p)^3$	$3p(1-p)^2$	$3p^2(1-p)$	p^3

3.2 La marche de Wiener et ses dérivées

La marche aléatoire la plus utilisée est la marche de Wiener dont l'importance tient notamment au fait que sa “limite” quand δt tend vers 0 est le fameux *processus stochastique* appelé mouvement brownien. On va définir la marche de Wiener au moyen de ses accroissements.

Définition : Soit (X) une marche aléatoire (m.a.). On appelle *accroissements* de (X) la marche aléatoire définie pour tout $t \in \mathbb{T} - \{0\}$ par

$$\delta X_t := X_t - X_{t-\delta t}$$

Définition : Une m.a. (X) est dite à *accroissements indépendants* si elle est telle que les v.a. $(\delta X_t, t \in \{\delta t, \ldots, n\delta t\})$ forment une famille de v.a. indépendantes.

La plupart des m.a. que nous étudierons auront la propriété d'être à accroissements indépendants. C'est le cas par exemple de la marche CRR. A noter que, par contre, la m.a. CRR elle-même, c'est-à-dire la famille $(S_t, t \in \{0, \delta t, \ldots, n\delta t\})$, n'est pas une famille de v.a. indépendantes : ce qui est vrai pour ses accroissements n'est pas vrai pour la marche elle-même.

Notons aussi que la donnée d'une m.a. (X) à accroissement indépendants équivaut à la donnée de sa valeur à l'instant $t = 0$ et de la m.a. de ses accroissements (δX).

Définition : Soient $\Omega = \{-1, +1\}^n$, $0 < p < 1$ et $\delta t > 0$ un réel fixé. On appelle *p-marche de Wiener* (ou simplement *marche de Wiener* lorsque $p = \frac{1}{2}$) la m.a. à accroissements indépendants définie pour tout $t \in \mathbb{T} - \{0\}$ par

$$\left\{ \begin{array}{rcl} W_0 &=& 0 \\ \delta W_t &=& \pm\sqrt{\delta t} \end{array} \right. \tag{3.1}$$

avec $P(\delta W_t = \sqrt{\delta t}) = p$ et $P(\delta W_t = -\sqrt{\delta t}) = 1-p$. On vérifie facilement que $\mathbb{E}(\delta W_t) = (2p-1)\sqrt{\delta t}$ et $\mathrm{Var}\,(\delta W_t) = 4p(1-p)\delta t$ (et donc $\mathbb{E}(\delta W_t) = 0$ et $\mathrm{Var}\,(\delta W_t) = \delta t$ pour $p = \frac{1}{2}$).

A partir de la marche de Wiener, on peut définir d'autres marches aléatoires :

Définition : On appelle *p-marche de Wiener avec dérive* la marche aléatoire définie par

$$\left\{ \begin{array}{rcl} X_0 & = & x_0 \\ \delta X_t & = & \mu\delta t + \sigma\delta W_t, \end{array} \right. \tag{3.2}$$

et *p-marche de Wiener géométrique* la marche aléatoire définie par

$$\left\{ \begin{array}{rcl} X_0 & = & x_0 \\ \delta X_t & = & X_{t-\delta t}(\mu\delta t + \sigma\delta W_{t-\delta t}). \end{array} \right. \tag{3.3}$$

En fait la marche de Wiener géométrique est un exemple de marche CRR pour laquelle $u = 1+\mu\delta t + \sigma\sqrt{\delta t}$ et $d = 1+\mu\delta t - \sigma\sqrt{\delta t}$. On pourra vérifier facilement que si $r = \mu$, les inégalités $0 < d < e^{r\delta t} < u$ sont satisfaites pourvu que δt soit suffisamment petit.

3.3 Filtration et information

Dans ce paragraphe, nous allons voir comment associer à toute marche aléatoire une filtration et pourquoi il est naturel de considérer que cette filtration, comme le font souvent les praticiens en finance, représente l'information disponible sur le marché à un instant donné.

Soient $\Omega^1, \ldots, \Omega^m$ des parties non vides de Ω. On dit que $\mathfrak{P} := \{\Omega^1, \ldots, \Omega^m\}$ est une *partition* de Ω si et seulement si les Ω^i sont deux-à-deux disjoints et Ω est la réunion des Ω^i.

La relation $\sim$ sur Ω définie par $\omega' \sim \omega"$ si et seulement si ω' et $\omega"$ appartiennent à un même $\Omega^i \in \mathfrak{P}$ est une relation d'équivalence. Réciproquement, si $\sim$ est une relation d'équivalence quelconque sur Ω, les classes d'équivalences $\overline{\omega} = \{w' \in \Omega \mid \omega' \sim \omega\}$ des éléments de Ω consituent une partition de Ω.

Définition : Lorsque Ω est l'espace probabilisé sous-jacent à une marche aléatoire (X), on peut définir sur Ω, pour chaque $t \in \mathbb{T}$, des partitions, que nous noterons $\mathfrak{P}_t$, associées à la marche aléatoire, par la relation d'équivalence $\overset{t}{\sim}$ suivante :

$$\omega' \overset{t}{\sim} \omega" \quad \text{si et seulement si } X_\tau(\omega') = X_\tau(\omega") \text{ pour tout } \tau \in [0..t]$$

En d'autres termes, deux états du monde sont é*quivalents jusqu'à l'instant* t si les trajectoires qui leurs sont associées coïncident jusqu'à l'instant t.

Exemple : Si la marche aléatoire est le modèle CRR à 3 étapes, on a :
- si $t = 0$, $\mathfrak{P}_0 = \{\Omega\}$.
- si $t = \delta t$, $\mathfrak{P}_{\delta t} = \{\Omega^1 = \{w_1, \omega_2, \omega_3, \omega_4\}, \Omega^2 = \{w_5, \omega_6, \omega_7, \omega_8\}\}$.
- si $t = 2\delta t$, $\mathfrak{P}_{2\delta t} = \{\Omega^{11} = \{w_1, \omega_2\}, \Omega^{12} = \{\omega_3, \omega_4\}, \Omega^{21} = \{w_5, \omega_6\}, \Omega^{22} = \{\omega_7, \omega_8\}\}$.
- si $t = 3\delta t$, $\mathfrak{P}_{3\delta t} = \{\{w_1\}, \{\omega_2\}, \{\omega_3\}, \{\omega_4\}, \{w_5\}, \{\omega_6\}, \{\omega_7\}, \{\omega_8\}\}$.

Définition : Soit Ω un ensemble fini et $\mathcal{F}$ une tribu de parties de Ω. On appelle *atome* de $\mathcal{F}$ tout élément de $\mathcal{F}$ qui ne contient pas d'autre élément de $\mathcal{F}$ que lui même et l'ensemble vide.

On démontre facilement la proposition suivante en appliquant les définitions de partition et de tribu :

Proposition 3.1 *Dans un ensemble Ω fini, on peut associer à toute partition $\mathfrak{P}$ la tribu engendrée par les éléments Ω^i de la partition et réciproquement on peut associer à toute tribu la partition formée par ses atomes.*

Exemple : Si la marche aléatoire est le modèle CRR à 3 étapes, on peut associer à chaque partition $\mathfrak{P}_t$, une tribu, notée $\mathcal{F}_t$:
- si $t = 0$, $\mathcal{F}_0 = \{\phi, \Omega\}$.
- si $t = \delta t$, $\mathcal{F}_{\delta t} = \{\phi, \Omega^1, \Omega^2, \Omega\}$.
- si $t = 2\delta t$, $\mathcal{F}_{2\delta t} = \{\phi, \Omega^{11}, \Omega^{12}, \Omega^{21}, \Omega^{22}, \Omega^1, \Omega^2, \Omega^{11} \cup \Omega^2, \ldots, \Omega\}$.
- si $t = 3\delta t$, $\mathcal{F}_{3\delta t} = \mathcal{P}(\Omega)$.

Et on a évidemment $\mathcal{F}_0 \subset \mathcal{F}_{\delta t} \subset \mathcal{F}_{2\delta t} \subset \mathcal{F}_{3\delta t}$. Cette suite croissante de tribus est appelée une *filtration.*

En généralisant l'exemple précédent, on comprend facilement qu'il est possible d'associer à toute marche aléatoire (X) une filtration $(\mathcal{F}_t)_{t\in\mathbb{T}}$ définie de la façon suivante : pour un t donné, les atomes de la tribu $\mathcal{F}_t$ sont constitués des états du monde $\omega \in \Omega$ auxquels sont associés des trajectoires qui coïncident jusqu'à l'instant t.

Lorsque $t = 0$, l'information dont on dispose est que l'un des états du monde $\omega \in \Omega$ va se réaliser (mais on ne sait pas lequel). A l'instant $t = \delta t$, l'actif que l'on modélise à fait soit un mouvement vers le haut soit un mouvement vers le bas et donc on sait, ayant pu observer cette évolution, que l'état du monde qui se réalisera appartient à Ω^1 ou bien à Ω^2. Et à l'instant $t = 2\delta t$, on saura qu'il appartient à Ω^{11}, Ω^{12}, Ω^{21} ou Ω^{22}, et ainsi de suite. A chaque nouvelle étape l'information dont on dispose sur l'actif observé augmente et on peut mesurer la finesse de cette information par la partition $\mathfrak{P}_t$ ou bien, ce qui revient au même, par la tribu $\mathcal{F}_t$. La suite de ces tribus, $(\mathcal{F}_t)_{t\in\mathbb{T}}$ représente donc *l'information dont on dispose à la date t en observant le marché.*

La raison pour laquelle on parle plus souvent de la filtration des tribus $\mathcal{F}_t$ plutot que de la famille des partitions $\mathfrak{P}_t$ est que, lorsqu'on voudra remplacer les modèles finis étudiés ici par des modèles continus, où Ω est supposé infini, la filtration continuera à être bien définie alors que la partition ne le sera plus.

Chapitre 4

Espérance conditionnelle

Dans les leçons précédentes nous avons appris à calculer le prix de diverses options à l'instant $t = 0$. Les options étant des actifs financiers négociables, qu'on veut pouvoir acheter et vendre aussi à des instants ultérieurs, on voudrait également savoir calculer leur prix à des instants $t > 0$. C'est ce que nous allons faire dans cette leçon grâce à la notion d'*espérance conditionnelle par rapport à une tribu.* On découvrira au passage que cette espérance conditionnelle, qui généralise l'espérance conditionnelle usuelle d'une variable aléatoire par rapport à un évènement, est en fait un extraordinaire outil de calcul, un de ceux qui font que la théorie des probabilités s'appelle souvent le *calcul* des probabilités.

4.1 Espérance conditionnelle d'une v.a. sachant un évènement

Voici tout d'abord quelques rappels de probabilités élémentaires. Soit $(\Omega, \mathcal{T}, P)$ un espace probabilisé que nous supposerons comme précédemment *fini* et satisfaisant en outre la condition suivante :

$$\forall \omega \in \Omega, P(\omega) \neq 0.$$

Soit X une variable aléatoire sur Ω. L'espérance de X est le *nombre* $\mathbb{E}\,(X) = \sum_{\omega\in\Omega} X(\omega)P(\omega)$. Notons que, pour tout évènement $A \subseteq \Omega$ appartenant à la tribu $\mathcal{T}$, on peut exprimer la probabilité de A comme l'espérance d'une v.a., en posant $P(A) = \sum_{\alpha\in A} P(\alpha) = \mathbb{E}\,\mathbb{I}_A$, où $\mathbb{I}_A$ désigne l'indicatrice de A, égale à 1 sur A et 0 sinon.

Plus généralement, on appelle "espérance de X sachant A" ou "espérance de X conditionnellement à A", le *nombre*, notée $\mathbb{E}(X/A)$, donné par

$$\mathbb{E}(X/A) = \frac{1}{P(A)} \sum_{\alpha\in A} X(\alpha)P(\alpha) = \frac{\mathbb{E}\,X\mathbb{I}_A}{\mathbb{E}\,\mathbb{I}_A}.$$

En d'autres termes $\mathbb{E}(X/A)$ est la moyenne, pondérée par les probabilités des éléments de A rapporté à la probabilité de A, des $X(\alpha)$ pour $\alpha \in A$.

Nous insistons sur le fait que l'espérance conditionnelle d'une v.a. sachant un évènement est un nombre. L'espérance conditionnelle par rapport à une tribu, que nous allons introduire à présent, n'est pas *un* nombre, mais "un nombre qui dépend de l'état du monde", c'est-à-dire une variable aléatoire.

4.2 Espérance conditionnelle d'une v.a. par rapport à une tribu

Soient $\mathcal{F} \subseteq \mathcal{T}$ une tribu et $\mathfrak{P} := \{\Omega_1, \ldots, \Omega_m\}$ la partition de Ω formée par les atomes de $\mathcal{F}$.

Définition : Soit X est une v.a. sur Ω. On appelle *espérance conditionnelle de X par rapport à la tribu $\mathcal{F} \subseteq \mathcal{T}$*, ou encore *espérance conditionnelle de X relativement à la partition $\mathfrak{P}$*, la v.a. notée $\mathbb{E}(X/\mathcal{F})$ définie, pour tout $\omega \in \Omega$, par

$$\mathbb{E}(X/\mathcal{F})(\omega) := \mathbb{E}[X/\overline{\omega}] = \frac{1}{P(\overline{\omega})} \sum_{\alpha\in\overline{\omega}} X(\alpha)P(\alpha)$$

où $\overline{\omega}$ désigne l'atome $\Omega_i \in \mathfrak{P}$ de la partition tel que $\omega \in \Omega_i$.

On voit donc que par définition l'espérance conditionnelle par rapport à une tribu $\mathcal{F}$ est une v.a. constante sur les atomes Ω_i de la partition associée à $\mathcal{F}$. On a plus précisément :

Proposition 4.1 *La v.a. $\mathbb{E}(X/\mathcal{F})$ est mesurable par rapport à la tribu $\mathcal{T}$ et de plus si Y désigne cette v.a., ($Y = \mathbb{E}(X/\mathcal{F})$), alors Y peut être définie comme l'unique v.a. $\mathcal{F}$-mesurable telle que*

$$\forall \Omega_i \in \mathfrak{P} \quad , \quad \mathbb{E}(Y/\Omega_i) = \mathbb{E}(X/\Omega_i). \tag{4.1}$$

Preuve : Le fait que $\mathbb{E}(X/\mathcal{F})$ soit mesurable par rapport à la tribu $\mathcal{T}$ est clair par définition puisqu'elle est constante sur les atomes de la partition $\mathfrak{P}$.

Montrons qu'elle vérifie l'équation (4.1) : on a

$$\mathbb{E}(Y/\Omega_i) = \frac{1}{P(\Omega_i)} \sum_{\alpha \in \Omega_i} Y(\alpha)P(\alpha) = \frac{1}{P(\Omega_i)} Y(\omega) \sum_{\omega \in \Omega_i} P(\omega) = Y(\omega)$$

où ω est un élément quelconque de l'atome Ω_i, puisque Y est constante sur les atomes. D'autre part, on a :

$$\mathbb{E}(X/\Omega_i) = \frac{1}{P(\Omega_i)} \sum_{\alpha \in \Omega_i} X(\alpha)P(\alpha) = Y(\omega)$$

pour tout $\omega \in \Omega_i$, par définition de Y. Réciproquement si Y est $\mathcal{F}$-mesurable, la relation $\mathbb{E}(Y/\Omega_i) = \mathbb{E}(X/\Omega_i)$ définit Y uniquement car, pour tout $\omega \in \Omega$, on posera $Y(\omega) := \mathbb{E}(X/\Omega_i)$, où Ω_i est l'atome contenant ω. □

Voici les principales propriétés de l'espérance conditionnelle :

Proposition 4.2 *Soient X et Y des v.a. sur $(\Omega, \mathcal{T}, P)$, $\mathcal{F}$ et $\mathcal{G}$ des sous-tribus de T, x_0, a et b des nombres réels. On a :*

1. $\mathbb{E}(X|\mathcal{T}) = X$, *et* $\mathbb{E}(X|\{\emptyset, \Omega\}) = \mathbb{E}(X)$.
2. $\mathbb{E}(aX + bY|\mathcal{F}) = a\mathbb{E}(X|\mathcal{F}) + b\mathbb{E}(Y|\mathcal{F})$.
3. *Si $X \geq 0$, on a $\mathbb{E}(X|\mathcal{F}) \geq 0$, avec égalité si et seulement si $X = 0$.*
4. $\mathbb{E}(x_0|\mathcal{F}) = x_0$.
5. *Si Y est $\mathcal{F}$-mesurable, on a $\mathbb{E}(XY|\mathcal{F}) = Y\mathbb{E}(X|\mathcal{F})$*
6. *Si $\mathcal{G} \subseteq \mathcal{F}$, on a $\mathbb{E}(\ \mathbb{E}(X|\mathcal{F}) \ | \ \mathcal{G}) = \mathbb{E}(X|\mathcal{G})$. En particulier $\mathbb{E}(\mathbb{E}(X|\mathcal{F})) = \mathbb{E}(X)$.*

Cette sixième propriété s'appelle la transitivité des espérances conditionnelles. Elle est d'un usage fréquent en finance.

4.3 L'espace euclidien $L^2(\Omega)$

On désigne par $L^2(\Omega)$ l'ensemble des variables aléatoires sur Ω dans le cas où on munit cet ensemble d'une structure euclidienne (c'est-à-dire d'un produit scalaire) que nous allons définir à présent. Cet espace de v.a. joue un rôle fondamental en économétrie et en calcul stochastique.

Tout d'abord, il est facile de munir l'ensemble des v.a. sur Ω d'une structure d'espace vectoriel : si X et Y sont deux éléments de cet ensemble, $X + Y$ et, pour tout $\lambda \in \mathbb{R}$, λX sont encore des v.a. sur Ω. D'autre part on peut définir un produit scalaire sur cet ensemble de la façon suivante :

$$< X, Y > := \mathbb{E}(XY) \tag{4.2}$$

et la norme associée par :

$$\|X\| := \sqrt{\mathbb{E}(X^2)}$$

En effet on vérifie facilement la bilinéarité et la symétrie ; de plus on a $\|X\| \geq 0$ puisque X^2 est une v.a. positive ou nulle ; enfin, si $\|X\| = 0$, alors $X = 0$ car $\mathbb{E}(X^2)$ est une combinaison linéaire à coefficients strictement positifs (puisque $P(\omega) > 0$ pour tout $\omega \in \Omega$) des nombres positifs.

On vérifie sans peine que l'on a $\mathbb{E}(X) =< X, 1 >$, $Cov(X, Y) =< X - \mathbb{E}(X), Y - \mathbb{E}(Y) >$ et donc $Var(X) =< X - \mathbb{E}(X), X - \mathbb{E}(X) >= \|X - \mathbb{E}(X)\|^2$.

L'espace $L^2(\Omega)$ des variables aléatoires sur Ω, muni du produit scalaire (4.2), est donc bien un espace euclidien. On sait que dans un espace euclidien on peut associer à tout vecteur sa projection orthogonale sur un sous espace. Rappelons la définition de la projection orthogonale :

Définition : Soient $G \subseteq L^2(\Omega)$ un sous espace vectoriel et $X \in L^2(\Omega)$ un vecteur quelconque. On appelle *projection orthogonale* de X sur G, notée $\pi(X)$ l'unique élément de G tel que

$$\forall Z \in G \quad , \quad < X - \pi(X), Z >= 0$$

On peut vérifier facilement que si $\mathcal{F}$ est une tribu alors l'ensemble des v.a. de $L^2(\Omega)$ $\mathcal{F}$-mesurables forment un sous espace vectoriel. En effet, si X et Y sont deux v.a. $\mathcal{F}$-mesurables, donc constantes sur les atomes de la partition associée à la tribu $\mathcal{F}$, toute combinaison linéaires $\lambda X + \mu Y$, pour λ et μ réels quelconques, est encore $\mathcal{F}$-mesurable.

Proposition 4.3 *Soient X une v.a. et $\mathcal{F}$ une tribu. L'espérance conditionnelle de X par rapport à la tribu $\mathcal{F}$ est la projection orthogonale de X sur le sous espace G des v.a. $\mathcal{F}$-mesurables.*

Preuve : Soit $Z \in G$. En utilisant les propriétés de l'espérance conditionnelle du théorème 4.2, on a :

$$\mathbb{E}(XZ) = \mathbb{E}(\mathbb{E}(XZ/\mathcal{F})) = \mathbb{E}(\mathbb{E}(X/\mathcal{F})Z)$$

donc $< X - \mathbb{E}(X/\mathcal{F}), Z >= \mathbb{E}(XZ) - \mathbb{E}(\mathbb{E}(X/\mathcal{F})Z) = 0$. □

4.4 Application au calcul de prix d'options

Soit $(X_t)_{t\in\mathbb{T}}$ une marche aléatoire et soit $(\mathcal{F}_t)_{t\in\mathbb{T}}$ la filtration associée; rappelons que la filtration associée à une m.a. est par définition la suite croissante de tribus

$$\{\phi, \Omega\} = \mathcal{F}_0 \subset \mathcal{F}_{\delta t} \subset \ldots \subset \mathcal{F}_T \subseteq \mathcal{P}(\Omega)$$

définie de la façon suivante : pour chaque $t \in \mathbb{T}$,les atomes de la tribu $\mathcal{F}_t$ sont les classes d'équivalence pour la relation :

$$\omega' \overset{t}{\sim} \omega" \;\text{ si et seulement si } X_\tau(\omega') = X_\tau(\omega") \text{ pour tout } \tau \in [0..t].$$

Un exemple de la filtration associée à la marche CRR est détaillé à la fin du chapitre 3.

On a vu ci-dessus comment associer à une v.a. X son espérance par rapport à une tribu, $Y = \mathbb{E}(X/\mathcal{F})$. Si l'on dispose non plus d'une seule tribu mais de toute une filtration $(\mathcal{F}_t)_{t\in\mathbb{T}}$, on peut associer alors, à toute v.a. X, une famille, indéxée par $t \in \mathbb{T}$, de variables aléatoires $Y_t := \mathbb{E}(X/\mathcal{F}_t)$, c'est-à-dire une nouvelle marche aléatoire $(Y_t)_{t\in\mathbb{T}}$.

Prenons l'exemple d'une option enropéenne standard $(T, \varphi(S_T))$ souscrite sur une actif $(S_t)_{t\in\mathbb{T}}$. La fonction de paiement $X := \varphi(S_T)$ est une v.a. sur l'ensemble des états du monde Ω sur lesquel est définie la m.a. (S_t). On peut donc associer à l'option une nouvelle m.a. donnée par $Y_t := \mathbb{E}(\varphi(S_T)/\mathcal{F}_t)$. Que représente Y_t par rapport à $X := \varphi(S_T)$? Pour chaque état du monde $\omega \in \Omega$, $Y_t(\omega)$ est l'espérance conditionnelle de X sachant $\overline{\omega}$, où $\overline{\omega}$ désigne l'atome de la tribu $\mathcal{F}_t$, c'est-à-dire l'ensemble des états du monde correspondant à des trajectoires de la marche (S_t) qui coïncident jusqu'à l'instant t. En d'autres termes, $Y_t(\omega)$ est la moyenne des paiements attendus sur toutes les trajectoires qui coïncident avec ω jusqu'à l'instant t, ou la moyenne des paiements futurs sachant la trajectoire S_s jusqu'à l'instant t, c'est-à-dire connaissant l'information jusqu'à t. Notons que l'on a $\mathbb{E}(\varphi(S_T)/\mathcal{F}_T) = \varphi(S_T)$ et $\mathbb{E}(\varphi(S_T)/\mathcal{F}_0) = \mathbb{E}(\varphi(S_T))$.

Utilisant la notion d'espérance conditionnelle par rapport aux tribus d'une filtration, il est possible de calculer le prix d'une option, non seulement à l'instant $t = 0$ mais à tout instant $t \in \mathbb{T}$: c'est la *formule fondamentale* qui généralise celle donnée au chapitre 2 pour $t = 0$.

Proposition 4.4 *Dans un marché financier $(S_t, B_t)_{t\in\mathbb{T}}$ où l'actif risqué S_t suit un modèle CRR et l'actif sans risque est donné par $B_t := e^{rt}$, le prix d'une option d'échéance T et de fonction de paiement $\varphi(S_T)$ est la marche aléatoire $(C_t)_{t\in\mathbb{T}}$ définie pour tout $t \in \mathbb{T}$ par*

$$C_t = e^{-r(T-t)}\mathbb{E}(\varphi(S_T)/\mathcal{F}_t) \tag{4.3}$$

où $(\mathcal{F}_t)_{t\in\mathbb{T}}$ est la filtration associée à la m.a. CRR $(S_t)_{t\in\mathbb{T}}$ et où l'espérance conditionnelle est calculée sous la probabilité de calcul p définie par $p = \frac{e^{r\delta t}-d}{u-d}$.

Une conséquence importante de cette proposition est que la m.a. $(C_t)_{t\in\mathbb{T}}$, prix de l'option à l'instant t selon les états du monde possède la propriété suivante : pour tout $t \in \mathbb{T}$, la v.a. C_t est $\mathcal{F}_t$-mesurable, où $(\mathcal{F}_t)_{t\in\mathbb{T}}$ est la filtration associée à l'actif sous-jacent $(S_t)_{t\in\mathbb{T}}$. On a même plus précisément l'existence d'une fonction (déterministe) $C(t,S)$ telle que $C_t = C(t,S_t)$, pour tout t et tout état du monde. On peut représenter le graphe de cette fonction comme un *filet*, c'est-à-dire une fonction définie au dessus de chaque noeud de l'arbre (t,S_t) formé des diverses valeurs prises par les trajectoires de la marche $(S_t)_{t\in\mathbb{T}}$. Sur la figure ci-dessous, on a représenté ce filet dans le cas d'une option Call ; on peut voir que sa section verticale à l'instant $t = T$ est bien le graphe du payoff d'un Call $(S-K)^+$ et sa section à l'instant $t = 0$ est un point C_0, l'écart vertical au point représentant S_0, d'ordonnée nul représentant la prime de l'option, c'est-à-dire son prix initial.