Université de Nice | L3 MASS, année 2011-2012, semestre 2
Département de Mathématiques | Finance Stochastique
NOM : | Date : 8 février 2012
PRENOM : | Groupe : | .

Finance mathématique : Feuille de réponses du TP 3
Calcul de prix d'options Call et Put

L'objet de cet exercice est de calculer dans un modèle de Cox-Ross-Rubinstein à n étapes le prix d'une option Call et d'une option Put de fonction de pay-off respective $\varphi(S) = (S-K)^+$ et $\varphi(S) = (K-S)^+$. Dans un premier temps nous considérons les Call et les Put à *la monnaie*, c'est-à-dire que l'on suppose que leur prix d'exercice vaut $K = S_0$. Rappelons que dans le modèle de Cox-Ross-Rubinstein, les prix de l'actif sous-jacent sont modélisés par une marche aléatoire S_t définie par $S_0 = S0$ et $S_{t+\delta t} = S_t U_t$, avec $U_t \in \{\texttt{up},\texttt{down}\}$, avec `up`$< 1 <$`down` dépendent de n. 0n pose à nouveau

$$n = 100 \;\; T = 1 \;\; \delta t = T/n \;\; up = e^{+\frac{\sigma}{\sqrt{n}}} \;\; down = e^{-\frac{\sigma}{\sqrt{n}}}$$

et on introduit comme dans le TP1 la notation $S(i,j) = SS(i+1, j+1)$, les valeurs des constantes étant cette fois $\sigma = 0.4$ et $S_0 = 140$.

Exercice 1. : Recalculer les valeurs de SS pour $i \in \{0, \ldots, n\}$ et $j \in \{0, \ldots, i\}$ et indiquer les valeurs obtenues après 15 pas de temps lorsqu'il n'y a eu aucun *up* puis lorsqu'il n'y a eu aucun *down*.

Trouve-t-on les mêmes valeurs pour SS lorsque n ne vaut plus que $n = 50$? Pourquoi ?

Que trouve-t-on pour SS lorsque la volatilité est nulle ? Expliquez pourquoi.

Exercice 2. : Afin de remplacer la fonction SS par la fonction $S(i,j)$, où i est bien le nombre de pas de temps et j le nombre de *up*, on pose

```
function S=S(i,j) ; S=SS(i+1,j+1) endfunction;
```

Indiquer les valeurs de $S(i,0)$ pour $i = 0...4$.

Exercice 3. : Calcul de la prime d'un Call et d'un Put On a vu que le prix $c(t, S_t)$ d'un portefeuille de couverture d'une option de pay-off φ peut se calculer par récurence rétrograde : on commence par la plus grande valeur $i = n$ car $c(T, S_T) = \varphi(S_T)$ puis, pour les $i < n$, on procède de la façon suivante : en notant $C(i,j) := c(i\delta t, S(i,j))$, on a $C(n,j) = \varphi(S(n,j))$, puis $C(i,j) = pC(i+1, j+1) + (1-p)C(i+1, j)$, où p est la probabilité risque neutre. Sous `scilab`, pour le même raisons que pour S, on pose `CC(i+1,j+1)=`$C(i,j)$.

Le code scilab ci-dessous calcule les valeurs `CC(i,j)` d'une option Call d'échéance $T = 1$ dans un modèle à $n = 100$ étapes.

```
function phi=phi(S);
phi=max(S-K,0);
endfunction;
CC=zeros(n+1,n+1);
for j=0 :n
CC(n+1,j+1)=phi(SS(n+1,j+1));
end;
for i=n-1 :-1 :0
for j=0 :i
CC(i+1,j+1)=(p*CC((i+1)+1,(j+1)+1)+(1-p)*CC((i+1)+1,j+1))/R;
end;
end;
```

Quelle valeur trouvez vous pour la *prime* $c(0,0)$ d'un Call à la monnaie pour $n = 100$?

Recommencer le calcul pour deux autres valeurs de K (par exemple $K = S_0 - 10$ et $K = S_0 + 10$). Qu'observez-vous ? Comment le prix du Call varie-t-il avec K ? Expliquez.

Reprendre les deux questions précédente pour un Put à la monnaie.

Exercice 4. :

Vérifier expérimentalement la relation de parité Call-Put à l'instant $t = 0$:

$$C_t - P_t = S_t - Ke^{-r(T-t)}.$$

Exercice 5. :

On veut tracer la courbe donnant la prime en fonction de la volatilité σ. Pour cela il convient de redéfinir les quantités up, down et p, puis de même SS et CC (ou PP) comme des fonctions de σ. Tracer cette courbe et la reproduire approximativement ci-dessous. Puis expliquez ce que vous observez.