NOM : Date : 15 Février 2012
PRENOM : .

Finance mathématique : feuille de réponses du TP 4
Prix d'une option comme espérance conditionnelle du payoff et volatilité implicite

L'objet de cette séance est de calculer dans un modèle de Cox-Ross-Rubinstein à n étapes le prix d'une option Call de payoff $\varphi(S) = (S-K)^+$ non plus au moyen d'une récurrence rétrograde mais comme une espérance du payoff actualisé. Nous verrons ensuite à quoi correspond la volatilité implicite.

Comme précédemment, on modélise les prix par une marche aléatoire S_t définie par $S_0 = S0$ et $S_{t+\delta t} = S_t U_t$, avec $U_t \in \{\mathtt{up},\mathtt{down}\}$, en introduisant la notation $S(i,j) = SS(i+1, j+1)$ pour représenter la valeur de l'actif S_t à l'instant $t = i\delta t$ s'il y a eu j up depuis l'instant $t = 0$. 0n pose :

$$n = 100 \;\; T = 1 \;\; \delta t = T/n \;\; up = e^{+\frac{\sigma}{\sqrt{n}}} \;\; down = e^{-\frac{\sigma}{\sqrt{n}}} \;\; \sigma = 0.4 \;\; S_0 = 120 \;\; r = 0.1 \;\; R = e^{r\delta t}.$$

On veut calculer la prime d'un Call à la monnaie sur l'actif S_t en utilisant la formule $C(0,0) = \mathbb{E}(\varphi(S(n,J))/R^n$, où J est une variable aléatoire qui suit une loi binômiale : $\mathbb{P}(\{J=k\}) = \begin{pmatrix} n \\ k \end{pmatrix} p^k(1-p)^{n-k}$, avec $\begin{pmatrix} n \\ k \end{pmatrix} = \frac{n\,!}{k\,!(n-k)\,!}$.

Exercice 1. :

1. Reprendre tout d'abord les codes des TP précédents permettant de calculer la marche S_t et la marche C_t avec les constantes ci-dessus. Les exécuter. Préciser à quoi correspond le vecteur `SS(1+n,1+0 :1+n)` .

2. Quelle prime trouvez-vous pour le Call à la monnaie ?

3. Expliquer, en vous aidant de l'aide de Scilab, ce que retournent chacune des commandes suivantes :
   `Phi(SS(1+n,1+0 :1+n))`

   `binomial(p,n)`

   `binomial(p,n)'`

   `Phi(SS(1+n,1+0 :1+n))*binomial(p,n)'`

4. En déduire la valeur de la prime du Call à la monnaie et la comparer avec la valeur obtenue ci-dessus.

Exercice 2. **:** Le code suivant permet de calculer le prix d'un Call $C(i,j)$ à la monnaie à un instant $t \in \{0, \delta t, 2\delta t, ...\}$ quelconque et non plus seulement en $t = 0$.

```
C=zeros(n+1,n+1)
C(1+n, :)=Phi(SS(1+n, :)) ;
for i=0 :n-1
      for j=0 :i
      C(1+i,1+j)=(Phi(SS(1+n,1+j :1+j+n-i))*binomial(p,n-i)')/R^(n-i)
      end ;
end ;
```

1. Expliquez pourquoi (on pourra dessiner les points de l'arbre CRR qu'on peut atteindre à l'instant $T = n\delta t$ à partir d'un point (i,j) de l'arbre) puis calculer quelques valeurs de C.

2. Quelle est la valeur du Call à la monnaie après 50 pas de temps lorsque l'actif sous jacent n'a cessé d'augmenter ?

3. Tracer l'arbre des valeurs du Call à la monnaie. Qu'observez-vous ?

Exercice 3. **:** Le code suivant permet de tracer la courbe donnant la prime du Call à la monnaie en fonction de la volatilité σ de l'actif sous-jacent.

```
function up=upsigma(sigma);
up=exp(sigma/sqrt(n));
endfunction;
function down=downsigma(sigma);
down=1/upsigma(sigma);
endfunction;
function p=psigma(sigma);
p=(R-downsigma(sigma))/(upsigma(sigma)-downsigma(sigma));
endfunction;
function S=S(i,j,sigma); // 0<=j<=i<=n
S=S0*upsigma(sigma).^j.*downsigma(sigma).^(i-j);
endfunction;
delta_sigma=0.01;sigmamax=0.5;
for s=1 :sigmamax/delta_sigma
CALL(s)=exp(-r*T)*(phi(S(n,0 :n,s*delta_sigma))*..
          binomial(psigma(s*delta_sigma),n)');
end;
plot2d(delta_sigma :delta_sigma :sigmamax,CALL)
```

1. Indiquer l'allure du graphe obtenu.

2. Tracer sur la même figure le graphe correspondant pour la valeur du Put à la monnaie. L'écart entre les deux courbes semble constant. Pouvez-vous l'expliquer ?

3. Déterminer graphiquement la volatilité implicite du sous-jacent si le prix du Call à la monnaie est 30. Même question pour 20. Voyez-vous comment la calculer avec la commande `fsolve` de Scilab ?