Université de Nice | L3 MASS
Département de Mathématiques | Calcul Stochastique appliqué la finance
NOM : | Date : 7 mars 2012
PRENOM : | Groupe : .

Feuille de réponses du TD 6
Calcul du prix d'une option barrière

On reprend les notations des TP précédents, avec les constantes suivantes $n = 100$, $T = 1$, $\sigma = 0.4$, $S_0 = 140$ et $r = 0.05$.

Exercice 1. : Créer un nouveau code Scilab en commençant par y recopier la définition de SS et celle de CC utilisée dans les TP précédents. Avant de l'exécuter, modifier les valeurs des constantes.

Combien vaut l'actif sous-jacent après 12 "down" ? Combien après 7 "down" et 5 "up" ? Combien vaut le Call à la monnaie ($K = S_0$) à l'instant t=0 ? Combien vaut-il à l'instant $t = \frac{1}{2}$ si l'actif sous-jacent n'a eu que des "down" ?

Exercice 2. : On rappelle qu'une option DIC est une option Call qui ne prend sa valeur à l'instant final T que si le cours de l'actif sous-jacent est passé en dessous d'une barrière.

Pour calculer la valeur d'une option DIC (on prendra ici la barrière égale à $L = 130$), on va utiliser, comme pour un Call vanille, sa définition $DIC_0 = \mathbb{E}\left(\varphi(S_T)\mathbb{I}_{\tau_L<T}\right)$ en programmant le calcul de cette espérance par récurrence retrograde. Pour prendre en compte l'indicatrice $\mathbb{I}_{\tau_L<T}$, on ajoute aux deux variables i et j usuelles une troisième variable notée k qui vaut 0 ou 1 selon qu'on envisage que $\mathbb{I}_{\tau_L<t}$ vaut 0 ou 1. La fonction `sousL(i,j)` est une fonction qui vaut 1 lorsqu'on est sous la barrière et 0 si l'on est au dessus. On l'utilise de la façon suivante : en $t = T$, l'option vaut $\varphi(S_T)$ lorsque $k = 1$ et elle vaut 0 sinon. Donc

$$DIC(n, j, 1) = \varphi(S(n, j)) \quad , \quad DIC(n, j, 0) = 0.$$

Lorsque $t < T$, l'option est égale à l'espérance actualisée de ses deux valeurs suivantes (comme pour un Call vanille) et la troisième variable k est egale à 1 à 0 selon qu'on suppose que la barrière a déjà été franchie ou non. On a donc :

$$DIC(i, j, k) = e^{-rT}\left(pDIC(i + 1, j + 1, k') + (1 - p)DIC(i + 1, j, k'')\right)$$

où $k' = \max(k, \texttt{sousL}(\texttt{i} + 1, \texttt{j} + 1))$ et $k'' = \max(k, \texttt{sousL}(\texttt{i} + 1, \texttt{j}))$.

1. Saisir le code correspondant (voir notes du cours) et en déduire la valeur de la prime de l'option DIC. Dupliquer puis modifier votre code pour qu'il calcule cette fois la prime de l'option DIP. Indiquer les valeurs trouvées.

2. Vérifier que DIC(1,1,2)=Call. Expliquer pourquoi.

3. Calculer le prix de l'option DIP lorsque $K = 120$ (en gardant $L = 130$ et $S_0 = 140$) et comparer avec le prix du Put. Expliquer pourquoi on aura toujours DIP=Put lorsque $K < L < S_0$.

4. Expliquer pourquoi la relation DIP+DOP=Put est vraie en $t = T$ et pourquoi elle reste vraie pour tous $t < T$ et donc en $t = 0$. Même question pour la relation DIC+DOC=Call.

5. Dupliquer puis modifier votre code pour qu'il calcule le prix des options DOC et DOP cette fois. Vérifier expérimentalement les relations indiquées à la question précédente, en testant le résultat pour différentes valeurs de t.