Université de Nice
Département de Mathématiques
NOM :
PRENOM :

L3 MASS
Calcul Stochastique appliqué la finance
Date : 14 mars 2012
.

Feuille-réponses du TD 7
Modèle de Tedeschi sans période d'exclusion

Exercice 1. : Modèle simplifié de Tedeschi
On considère un modèle de Tedeschi sans temps d'exclusion. La seule sanction en cas de non-remboursement du prêt et des intérêts est la perte du droit automatique à un nouveau prêt et le renvoi dans le statut de demandeur. Rappelons qu'un demandeur n'a qu'une probabilité γ de se voir attribuer un prêt : on dit alors qu'il devient un bénéficiaire B. On suppose que tout bénéficiaire a une probabilité α de rembourser son prêt : dans ce cas il reste bénéficiaire, sinon il redevient demandeur.

1. Ecrire le diagramme de cette chaîne de Markov à deux état B et D ainsi que sa matrice de transition P.

2. Trouver son vecteur propre à gauche unitaire π^* associé à la valeur propre 1 : c'est une distribution stationnaire de la chaîne.

   Choisir $\alpha = 0.90$ et $\gamma = 0.50$, calculer π^* et vérifier, en utilisant Scilab, qu'il s'agit bien d'une distribution stationnaire. Quelles commandes Scilab avez-vous utilisées ?

3. Recommencer avec $\alpha = 0.97$ et $\gamma = 0.10$. La proportion de bénéficiaires a-t-elle augmenté ? Pouvez-vous l'expliquer ?

4. On suppose que la proportion initiale de bénéficiaires dans la population est de 10%. Calculer dans chacun des deux cas précédents la proportion après 50 étapes, après 100 étapes. Qu'observez-vous ?

Exercice 2. : Modèle de Tedeschi avec deux types d'emprunteurs
On distingue à présent deux types d'emprunteurs : les sûrs S et les risqués R de probabilités de remboursement respectives égales à $\alpha_S > \alpha_R$. Une nouvelle fois, la seule sanction en cas de non remboursement est que l'emprunteur perd le statut de bénéficiaire et redevient demandeur, toujours avec un proba γ de redevenir bénéficiaire. On suppose que la probabilité qu'un bénéficiaire ayant obtenu un prêt soit sûr est β et celle qu'il soit risqué $1-\beta$. On modélise cette situation par une chaine de Markov à trois états $S = \{S, D, R\}$ et avec la matrice de transition suivante :

$$\mathbb{P} = \begin{pmatrix} \alpha_S & 1-\alpha_S & 0 \\ \gamma\beta & 1-\gamma & (1-\beta)\gamma \\ 0 & 1-\alpha_R & \alpha_R \end{pmatrix}$$

1. Tracer le diagramme de cette chaîne de Markov (X_t). Préciser que vaut la probabilité $P(X_{t+1} = R/X_t = D)$ et expliquer cette valeur.

2. Pour $\alpha_S = 0.92$, $\alpha_R = 0.88$, $\beta = 0.40$ et $\gamma = 0.30$; choisir une distribution initiale et calculer son image au temps $t = 50$, $t = 500$. Qu'observez-vous ?

3. Recommencer avec $\alpha_S = 0.98$, $\alpha_R = 0.96$ et $\gamma = 0.50$.

4. Dans ces deux cas, calculer au moyen de Scilab (la commande utile est `spec`, voir l'aide en ligne) le vecteur propre unitaire de $\mathbb{P}$ de valeur propre 1. Comparez avez les résultats des questions précédentes.