Université de Nice, Département de Mathématique
NOM :
PRENOM : Groupe :

Calcul Stochastique, L3 MASS
4 Avril 2012

Calcul stochastique : feuille de réponses du TP 9
Etude de la convergence du prix CRR vers le prix BS

On reprend les notations des TP précédents, avec les constantes suivantes $T = 1$, $\sigma = 0.4$, $S_0 = 140$ et $r = 0.05$.

Exercice 1. : Créer un nouveau code Scilab et y définir successivement les 5 quantités $\delta t = T/n$, $R = e^{r\delta t}$, $up = e^{\sigma\sqrt{\delta t}}$, $down = e^{-\sigma\sqrt{\delta t}}$ et $p = (R-d)/u-d)$ comme 5 fonctions de n.

Vérifier, en choisissant quelque valeurs de n, que la limite de $p(n)$ quand n tend vers l'infini est 1/2.

$p(10) = 0.488...$
$p(100) = 0.496...$
$p(1000) = 0.4988...$
Numériquement $\lim_{n\to+\infty} p(n) = \frac{1}{2}$

$$p(n) = \frac{e^{r\delta t} - e^{-\sigma\sqrt{\delta t}}}{e^{\sigma\sqrt{\delta t}} - e^{-\sigma\sqrt{\delta t}}} \underset{\delta t\to 0}{\simeq} \frac{r\delta t + \sigma\sqrt{\delta t}}{2\sigma\sqrt{\delta t}} = \frac{\sigma + r\sqrt{\delta t}}{2\sigma} \xrightarrow[\delta t\to 0]{} \frac{1}{2}$$

Exercice 2. : Expliquez ce que calcule le code Scilab suivant.

```
//La fonction S
function y=S(i,j,n) ;
y=S0.*(up(n)).^j.*(down(n)).^(i-j) ;
endfunction ;
//La fonction C
function phi=phi(S) ;
phi=max(S-K,0) ;
endfunction ;
function z=C(i,j,n) ;
z=(phi(S(n,j :(j+n-i),n))*binomial(p(n),n-i)')/R(n)^(n-i) ;
endfunction ;
//Trace du Call en fonction de n
Nmax=250 ;CCall=zeros(Nmax) ;
for n=1 :Nmax, Call(n)=C(0,0,n) ; end ;
plot2d(10 :Nmax,Call(10 :Nmax)) ;
```

Ce code calcule et trace le Call à l'aide de l'espérance conditionnelle. Le tracé est affiché pour $10 \leq n \leq Nmax = 250$.

Exercice 3. : Ajouter le code précédent à votre code et l'utiliser pour calculer le prix du Call pour $K = 135$ lorsque $n = 15$. Quelle valeur trouvez-vous?

$C(0,0,15) = 27,8\ldots$

Que savez-vous de la limite des oscillations observées sur votre graphique? L'imprimer et le joindre à votre feuille.

Les oscillations tendent vers 0 et le call converge vers le prix donné par la formule de Black-Scholes quand le pas de discrétisation $n \to +\infty$.

Exercice 4. : Même question dans le cas d'un ~~Call~~ Put à la monnaie.

$S_0 = 140$, $K = 135$ le Put est donné par

$P(0, 0, 15) = 16,22 \ldots$

Faire le tracé correspondant pour un Put d'abord avec $K = 135$ puis avec $K = 140$. Qu'observez-v

On observe que les oscillations diminuent et que le résultat est plus centré pour le cas où $K = S_0$

Exercice 5. : Montrer que si l'on pose $\text{erf}(x) = \frac{2}{\sqrt{\pi}}\int_0^x e^{-t^2}dt$, la fonction de répartition d'une loi normale centrée réduite $\mathcal{N}(x)$ vérifie $\mathcal{N}(x) = (1 + \text{erf}(x/\sqrt{2}))/2$.

$$\mathcal{N}(x) = \int_{-\infty}^{x} \frac{e^{-y^2/2}}{\sqrt{2\pi}}\, dy$$

$$= \int_{-\infty}^{0} \frac{e^{-y^2/2}}{\sqrt{2\pi}}\, dy + \int_{0}^{x} \frac{e^{-y^2/2}}{\sqrt{2\pi}}\, dy$$

$$= \underset{\text{(loi symétrique)}}{\frac{1}{2}} + \int_0^{x/\sqrt{2}} \frac{e^{-z^2}}{\sqrt{2\pi}} \sqrt{2}\, dz \qquad z = y/\sqrt{2}\,,\ \sqrt{2}\,dz = dy$$

$$= \frac{1}{2} + \frac{1}{\sqrt{\pi}} \int_0^{x/\sqrt{2}} e^{-z^2} dz$$

$$= \frac{1}{2}\left(1 + \text{erf}(x)\right)$$

Définir une fonction BlackScholes(S,K,r,T,σ) donnant la valeur du Call de prix d'exercice K à la date d'exercice T lorsque le taux (constant) vaut r et la volatilité est égale à σ, en utilisant la formule de Black et Scholes

$$C = S\mathcal{N}(d_1) - Ke^{-rT}\mathcal{N}(d_2) \ \text{, avec } d_1 = \frac{1}{\sigma\sqrt{T}}\left[\ln\frac{S_0}{K} + T\left(r + \frac{\sigma^2}{2}\right)\right] \text{ et } d_2 = d_1 - \sigma\sqrt{T}.$$

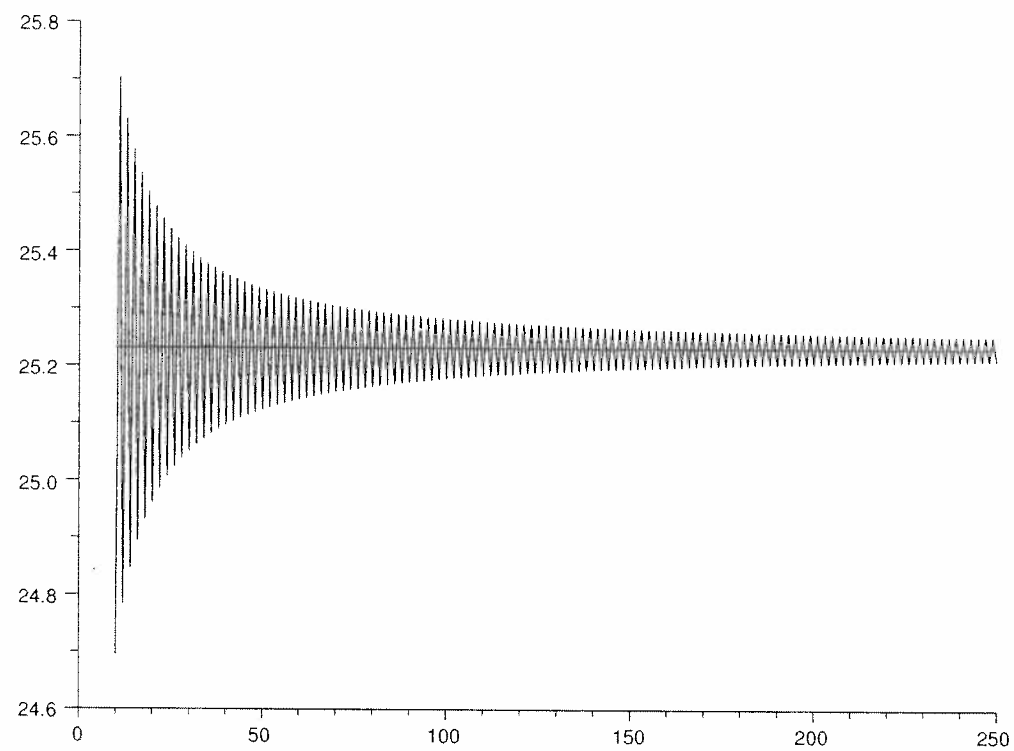
On pourra utiliser la fonction Scilab erf.

Ajouter une droite horizontale d'ordonnée C sur le dessins des oscillations des prix CRR. Imprimer le résultat.

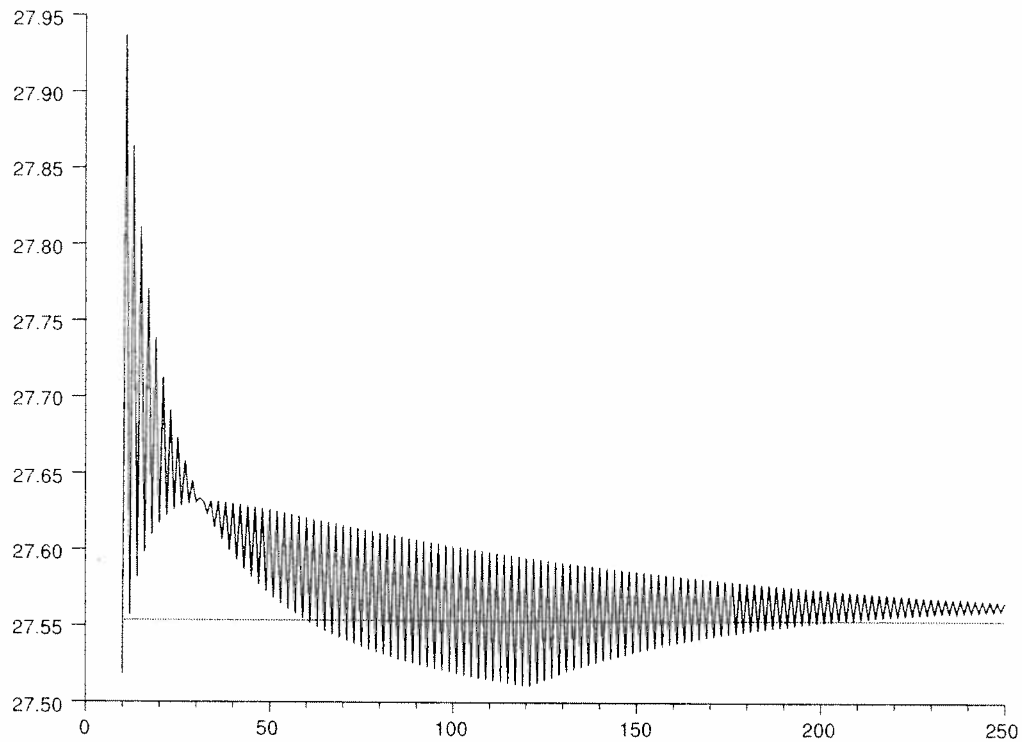
Noter que $S = S_0$ dans la définition de C

$S_0 = 140 = K$ $\qquad\qquad$ $K = 135$

Call $= 25,23\ldots$ $\qquad\qquad$ $C = 24,55\ldots$



$S_0 = K = 140$


27.95
27.90
27.85
27.80
27.75
27.70
27.65
27.60
27.55
27.50
0
50
100
150
200
250

K=135