Université de Nice
Département de Mathématiques
NOM :
PRENOM :

L3 MASS, année 2011-2012
Calcul Stochastique et finance (semestre 2)
Date :
Groupe :

Calcul stochastique : TP 11
Etude du modèle de Ho et Lee

Le modèle de Ho et Lee est un modèle mathématique pour la valeur d'un zéro-coupon Z_t^T, $t, T \in [0..T_{\max}]_{\delta t} =: \mathbb{T}$, $\delta t := T_{\max}/N$, $t \leq T$, où Z_t^T désigne la valeur à la date t d'un contrat assurant le paiement de 1 EUR à la date T. On a donc $Z_T^T = 1$ pour n'importe quel $T \in \mathbb{T}$. C'est un modèle probabiliste sur un ensemble Ω servant à coder tous les états du monde envisagés par le modèle, filtré par une filtration $\mathbb{F} = (\mathcal{F}_t)_{t \in \mathbb{T}}$ servant à coder l'information disponible à la date $t \in \mathbb{T}$. En fait, dans ce modèle, la seule information pertinente est celle contenue dans la suite des valeurs des v.a. $(X_t)_{t \in \mathbb{T}^*}$, $\mathbb{T}^* :=]0..T]_{\delta t}$, $X_t \in \{0, 1\}$, les X_t de même loi $\mathbb{P}^*(X_t = 0) = \pi$, $\mathcal{F}_t$-mesurables, et indépendantes de $\mathcal{F}_{t-\delta t}$Pour tout $t \in \mathbb{T}^*$, on pose $J_t := \sum_{s \in]0..t]_{\delta t}} X_s$ et on note n et k, $n \leq k$, les entiers tels que $t = n\delta t$ et $T = k\delta t$. La caractéristique d'un modèle de Ho et Lee est que les zéros coupons $Z_t^T(\omega)$ appartiennent à un arbre binaire recombinant, c'est-à-dire que, $Z_{n\delta t}^T(\omega)$ ne prend que $n + 1$ valeurs distinctes, ne dépendant que de la valeur $j = J_{n\delta t}(\omega)$. Pour $0 \leq j (= J_{n\delta t}(\omega)) \leq n \leq k$, nous noterons $Z_{n\delta t}^{k\delta t}(\omega)$:=`Z(n,j,k)`.

1. Pourquoi a-ton `Z(k,j,k)`$= 1$?

Par définition du zéro-coupon $Z_T^T = 1$,
Or $Z(n=k, j, k) = Z_{n\delta t}^{k\delta t}(\omega) = 1$ car $\boxed{n = k}$

2. Nous avons montré que tout modèle de Ho et Lee est sans arbitrage, et qu'il satisfait à :

$$Z_t^T = \frac{Z_{t-\delta t}^T}{Z_{t-\delta t}^t} \eta(\theta^T(t), X_t) \text{ , où } \theta^T(t) := T - t, \tag{1}$$

pour une fonction η définie par le choix[1] d'un $\delta > 1$, caractérisant, avec $\pi \in]0, 1[$, le modèle retenu, définie par

$$\eta(\theta, 0) := \frac{1}{\pi + (1 - \pi)\delta^{\frac{T-t}{\delta t}}} \text{ et } \eta(\theta, 1) = \eta(\theta, 0) \cdot \delta^{\frac{T-t}{\delta t}} \tag{2}$$

Les valeurs des Z_0^T, $T \in \mathbb{T}$, peuvent être choisies de manière arbitraire, en pratique comme étant les valeurs spot des zéros-coupons observées sur le marché à l'instant $t = 0$.
Calculer $\mathbb{E}^*(\eta(\theta, X_t))$ pour tout θ et t dans $\mathbb{T}^*$, et où $\mathbb{E}^*$ désigne l'espérance pour la probabilité $\mathbb{P}^*$.

$$\mathbb{E}^*(\eta(\theta, X_t)) = \mathbb{P}^*(X_t = 0)\eta(\theta, 0) + \mathbb{P}^*(X_t = 1)\eta(\theta, 1)$$
$$= \pi\, \eta(\theta, 0) + (1-\pi)\, \eta(\theta, 0)\, \delta^{\frac{T-t}{\delta t}}$$
$$= \left(\pi + (1-\pi)\delta^{\frac{T-t}{\delta t}}\right) \times \eta(\theta, 0)$$
$$= 1$$ (ce qui est cohérent avec le modèle déterministe)

3. Voici une implantation du modèle pour lequel on a $T_{\max} = N$ (et donc $\delta t = 1$=`delta_t`). t =`n*delta_t`, T =`k*delta_t`, $J_t(\omega)$ =`j`, $T - t$ =`l*delta_t`, T =`k*deltat_t`, $\eta(T - t, X_t(\omega))$ =`eta(l*delta_t,x)`, pour `x`= $X_t(\omega)$, $Z_t^T(\omega)$ =`Z(n,j,k)`, pour $J_t(\omega)$ =`j`, avec les choix π =`pi :=0.5`, et δ =`delta :=1.01`.

[1] C'est le choix $\delta (= \eta(\delta t, 1)/\eta(\delta t, 0)) > 1$ qui exprime qu'un $X_t(\omega) = 1$ code un "*up*" et $X_t(\omega) = 0$ code un "*down*"

```
// Modèle de Ho et Lee
clear ;Nmax=8 ;Tmax=Nmax ;delta_t=Tmax/Nmax ;
pi=0.5 ;delta=1.01 ;r=0.025 ;
function z0=Z0(k) ; z0=(1+r)^(-k*delta_t) ; endfunction ;
plot(0 :Nmax,Z0(0 :Nmax)) ;
//
function ee=eta(l,x) ;
if x==0
ee=(1^l)./(pi+(1-pi)*delta^l) ;
else ee=delta^l./(pi+(1-pi)*delta^l) ;
end ;
endfunction ;
// représentation des eta extrèmes
xset("window",1) ;clf(1) ;
Nprime=1000 ;for x=0 :1 plot(0 :Nprime,eta(0 :Nprime,x)) ; end ;
//calcul des valeurs de la fonctions Z(n,j,k)=ZZ(n+1,j+1,k+1)
ZZ=ones(Nmax+1,Nmax+1,Nmax+1) ;
for k=0 :Nmax
ZZ(0+1,1,k+1)=Z0(k) ;
end ;
for n=1 :Nmax
for k=n :Nmax
ZZ(n+1,0+1,k+1)=eta(k-n,0)*ZZ(n-1+1,0+1,k+1)/ZZ(n-1+1,0+1,n+1) ;
for j=1 :n
ZZ(n+1,j+1,k+1)=eta(k-n,1)*ZZ(n-1+1,j-1+1,k+1)/ZZ(n-1+1,j-1+1,n+1) ;
end ;
end ;
end ;
function z=Z(n,j,k) //t=n*delta_t et T=k*delta_t
z=ZZ(n+1,j+1,k+1) ;
endfunction ;
// Dessins : représentation des évolutions possibles de Z(n,j,N) pour N=Nmax
xset("window",2) ;clf(2) ;
N=Nmax ;
//courbes "down"
for j=0 :N plot(j :N,Z(j :N,j,N),'-b') ; end ;
//courbes "up"
for n1=0 :N
Vecteur=zeros(N-n1+1) ;
for nn=0 :N-n1
Vecteur(nn+1)=Z(n1+nn,nn,N) ;
end ;
plot(n1 :N,Vecteur,'--r') ;
end ;
xs2gif(2,'arbHoLee.gif') ;xs2eps(2,'arbHoLee.eps') ;xs2fig(2,'arbHoLee.fig') ;
```

(a) Comment a été choisie la fonction $T \mapsto Z_0^T$ constituée par les valeurs initiales de Z_t^T ?

Dans la " function Z0(k) " on a

$$Z_0^T = (1+r)^{-T}$$

typiquement ce que l'on obtient dans le modèle déterministe avec un taux r constant.

(b) Exercez-vous à lire l'arbre des valeurs de Z^8 : que vaut Z_8^8 ? Que vaut Z_0^8 et retrouver cette valeur sur la courbe `StructureParTermesInitiale`? Que vaut Z_4^8 après deux "*up*" et deux "*down*" ? Que vaut Z_6^8 après rien que des "*up*" ? On dit dans ce dernier cas que le zéro-coupon d'échéance $T = 8$ est "*above par*" ; pourquoi l'existence d'une telle situation paraît-elle être une critique à formuler contre ce modèle ?

$Z_8^8 =$ 1 comme prévu dans la réponse $\frac{1}{k\delta t}$.

$h=0 \Rightarrow j=0$ $\quad Z_0^8 =$ 0,82... $= Z(0,0,8)$ car $Z(n,k,j) = Z_{n\delta t}^{k\delta t}(\omega)$ $\quad j \le n \le k$

j le nbre de "up" de ω

Après deux "*up*" et deux "*down*" $Z_4^8 =$ $Z(4,2,8) = 0,90\ldots$

Après rien que des "*up*" $Z_6^8 =$ $Z(6,6,8) = 1,009\ldots$

L'existence de situation où comme celle envisagée ci-dessus pour Z_6^8 surprend car elle signifie que ... lorsqu'il n'y a que des "up"

$1,009\ldots = Z_6^8(\omega) > Z_8^8 = 1$ quand $J_6(\omega) = 6$

alors que l'on s'attend à avoir toujours $Z_6^8(\omega) \le 1$!

4. **Taux actuariels :** On appelle taux actuariel d'un zéro-coupon le taux noté A_t^T (ou $a(t,T)$) tel que

$$Z_t^T (1 + A_t^T)^{\frac{T-t}{\delta t}} = 1.$$

Il n'est donc défini que pour $t < T$.

(a) Calculer A_t^T en fonction de Z_t^T. Que constatez-vous pour $t = T$?

$$Z_t^T (1 + A_t^T)^{\frac{T-t}{\delta t}} = 1 \Rightarrow (1 + A_t^T)^{\frac{T-t}{\delta t}} = \frac{1}{Z_t^T} \Rightarrow \boxed{A_t^T = (Z_t^T)^{-\frac{\delta t}{T-t}} - 1}$$

Pour $t = T$ cette formule est indéfinie

Sauf si l'on prend $\boxed{A_T^T = 0}$ car $Z_T^T = 1$.

Le taux actuariel est nul si $t = T$ ce qui est normal.

(b) Définir une fonction `A(n,j,k)` correspondant au zéro-coupon $Z_{n\delta t}^{k\delta t}(\omega)$ quand $J_{n\delta t}(\omega) = j$. qui est lui de valeur `Z(n,j,k)`.

On peut aussi écrire $A_t^T = \exp\left(-\frac{\delta t}{T-t} \ln(Z_t^T)\right) - 1$

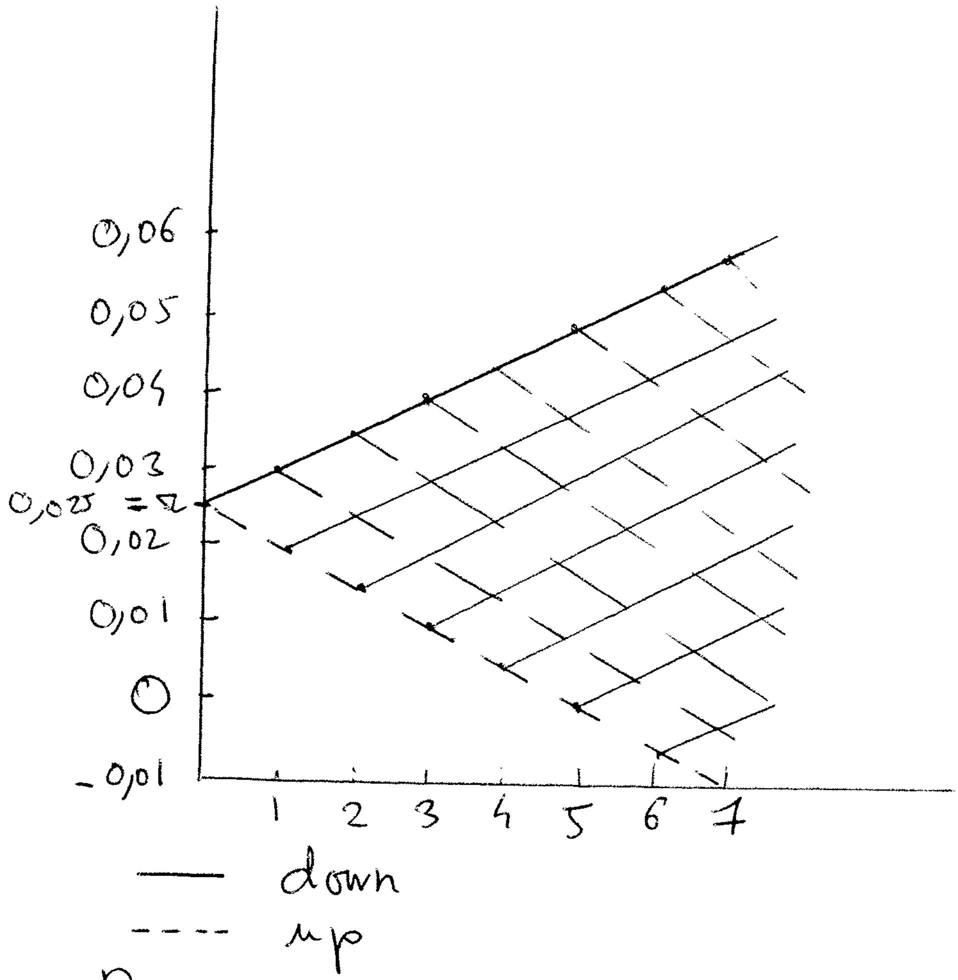
et utiliser l'une des deux formules pour définir la

function a = A(n,j,k)

a = exp(-~~log~~(Z((n),j,k))'./((k)-(n))) - 1

end function;

(c) Représenter l'arbre des taux actuariels joignant chaque valeur de A_t^T aux deux valeurs $A_{t+\delta t}^T$ pouvant lui succéder dans ce modèle.



Remarquer l'apparition de taux négatifs lorsqu'il n'y a que des up,

ainsi que de taux $\geqslant 2r$ lorsqu'il n'y a que des down.

Ces 2 situations extrêmes peuvent s'interpréter comme des CRISES.

(d) Comment se manifeste ici ce que vous avez observé pour Z_6^8 dans la question précèdente.

L'apparition des (intérêts négatifs) taux < 0.