Corrigé

Université de Nice
Département de Mathématiques
NOM :
PRENOM :

L3MASS. année 2009-2010
Calcul stochastique et Finance
Date :
Groupe : 14/4/2010

Calcul stochastique : TP 10
Evolution de la courbe des taux dans un modèle de Ho et Lee

On reprend les notations du TP précédent pour le modèle de taux de Ho et Lee. Le zéro-coupon Z_t^T, $t, T \in [0..T_{\max}]_{\delta t} =: \mathbb{T}$, $\delta t := T_{\max}/N$, $t \leq T$, désigne la valeur à la date t d'un contrat assurant le paiement de 1 EUR à la date T. Rappelons qu'il satisfait à la récurrence :

$$Z_t^T = \frac{Z_{t-\delta t}^T}{Z_{t-\delta t}^t}\eta(\theta^T(t), X_t)\text{ , où }\theta^T(t) := T - t, \tag{1}$$

pour une fonction η définie par le choix d'un $\delta > 1$, caractérisant, avec $\pi \in]0, 1[$, le modèle retenu, par

$$\eta(\theta, 0) := \frac{1}{\pi + (1-\pi)\delta^{\frac{T-t}{\delta t}}} \text{ et } \eta(\theta, 1) = \eta(\theta, 0) \cdot \delta^{\frac{T-t}{\delta t}} \tag{2}$$

Les valeurs des Z_0^T, valeurs spot des zéros-coupons observées sur le marché à l'instant $t = 0$, sont choisies comme dans le TP précédent. On définit le taux court, "sans risque" r_t, par

$$Z_t^{t+\delta t}(1 + r_{t+\delta t}) = 1$$

. On voit donc que $r_{t+\delta t}$ est $\mathcal{F}_t$-mesurable (on dit que le processus $(r_t)_{t\in\mathbb{T}^*}$ est $\mathbb{F}$-*prévisible*) : on pose

$$B_t := (1 + r_{\delta t})(1 + r_{2\delta t})\dots(1 + r_t) \text{ et } \tilde{Z}_t^T := Z_t^T/B_t.$$

Les constantes sont, comme précédemment $T_{\max} = N$ (et donc δt = 1=delta_t), t =n*delta_t, T =k*delta_t, $J_t(\omega)$ =j. $T - t$ =l*delta_t, T =k*deltat_t, $\eta(T - t, X_t(\omega))$ =eta(l*delta_t,x), pour x= $X_t(\omega)$, $Z_t^T(\omega)$ =Z(n,j,k), pour $J_t(\omega)$ =j, avec les choix π =pi :=0.5, et δ =delta :=1.01. On suppose toujours que le taux JJ initial $r_{\delta t}$ est de 2% et que la courbe des taux initiale correspond à un taux indépendant de la maturité T. Le taux actuariel d'un zéro-coupon, noté A_t^T (ou $a(t,T)$) et défini par $Z_t^T(1 + A_t^T)^{\frac{T-t}{\delta t}} = 1$ est calculé au moyen de la fonction A(n,j,k).

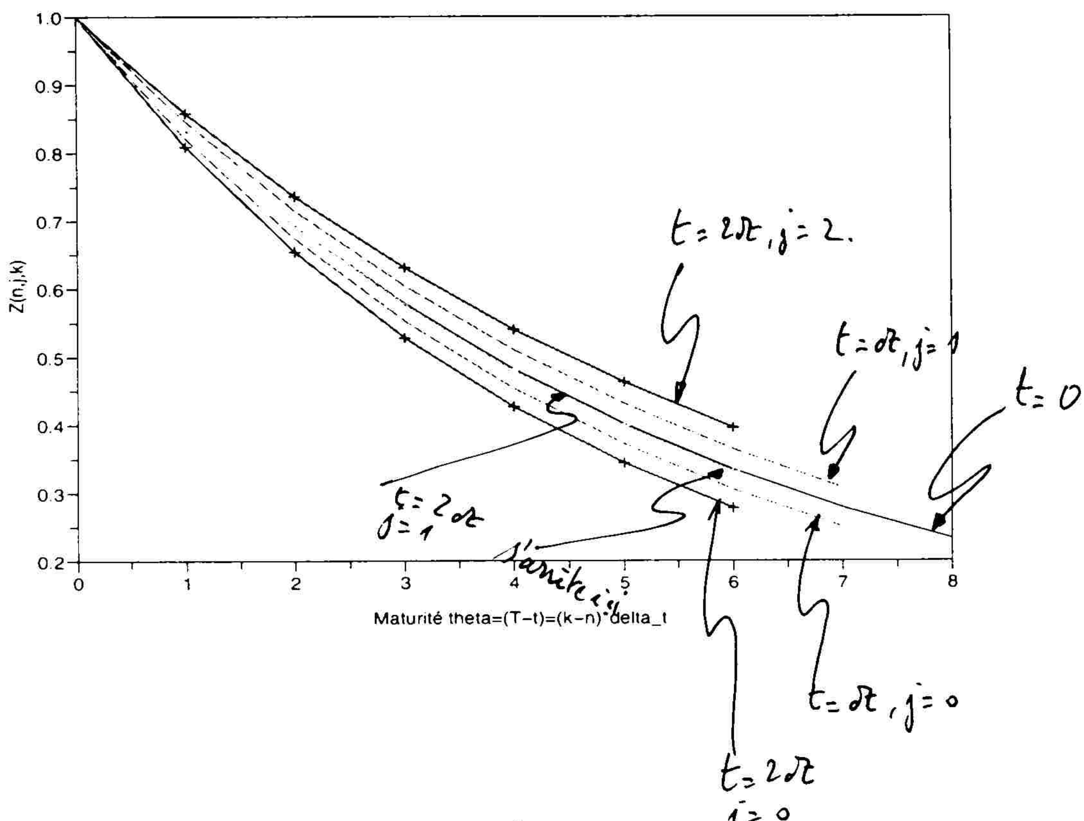
On a représenté sur la page suivante quelques courbes des taux à divers instants t =n*delta_tobtenues en calculant la matrice ZZ puis en définissant les fonctions Z(n,j,k) et A(n,j,k) par

```
// pour s'affranchir de "+1" dans les 3 arguments de ZZ,
//on introduit la fonction Z :
function z=Z(n,j,k) //t=n*delta_t et T=k*delta_t
z=ZZ(n+1,j+1,k+1);
endfunction;
// Calcul du taux actuariel A(t,T) associe au zero coupon Z(t,T) :
function a=A(n,j,k)
a=exp(-log(Z((n),j,k))'./((k)-(n)))-1 // attention : n<k
endfunction;
```

et en utilisant le code suivant :

```
//evolution de la courbe des taux
xset("window",5);
// t=0
AbscT=zeros(Nmax+1);
OrdoZ=zeros(Nmax+1);
for kk=1 :Nmax+1 ; //kk commence toujours 1
AbscT(kk)=kk-1;
OrdoZ(kk)=Z(0,0,kk-1);
end;
plot2d(AbscT,OrdoZ);
// t=delta_t
AbscT=zeros(Nmax);
OrdoZ=zeros(Nmax);
```

```
for kk=1 :Nmax ; //kk commence toujours 1
AbscT(kk)=kk-1;
OrdoZ(kk)=Z(1,0,kk+1-1);//apres un "down"
end;                                          j=0
plot(AbscT,OrdoZ,"--r");
for kk=1 :Nmax ; //kk commence toujours 1
AbscT(kk)=kk-1;
OrdoZ(kk)=Z(1,1,kk+1-1);//aprs un "up"
end;                                          j=1
plot(AbscT,OrdoZ,"--b");
// t=2*delta_t
AbscT=zeros(Nmax-1);
OrdoZ=zeros(Nmax-1);
//j=0
for kk=1 :Nmax-1 ; //kk commence toujours 1
AbscT(kk)=kk-1;
OrdoZ(kk)=Z(2,0,kk+2-1);
end;                           j=0
plot(AbscT,OrdoZ,"-+r");
//j=1 , AbscT inchang          "+" rouges (red)
OrdoZ=zeros(Nmax);
for kk=1 :Nmax-1 ; //kk commence toujours 1
OrdoZ(kk)=Z(2,1,kk+2-1);//j=1
end;                           j=1
plot(AbscT,OrdoZ,"-+g");
//j=2 , AbscT inchang               "+" verts (green)
OrdoZ=zeros(Nmax);
for kk=1 :Nmax-1 ; //kk commence toujours 1
OrdoZ(kk)=Z(2,2,kk+2-1);//j=2
end;                           j=2
plot(AbscT,OrdoZ,"-+b");
                                   "+" bleus (blue)
```



1. On se propose d'étudier comment la courbe des zéros coupons $T \mapsto Z(t,T)$ se déforme lorque t passe de $t = 0$ à $t = \delta t$, $t = 2\delta t$, représentées sur la figure ci contre. Combien de courbes sont représentées ?

Il y a 6 courbes représentées : une à $t=0$, deux à $t=\delta t$, trois à $t=2\delta t$

NB : L'une de ces trois dernières courbes est quasi confondue avec la courbe initiale ($t=0$)

2. Pour chacune des courbes représentées, indiquer *sur la figure* à quelle valeur de $t \in \{0, \delta t, 2\delta t\}$ elle correspond et à quelle valeur de j.

t $j=1$

3. Pourquoi les courbes sont-elles de longueurs différentes ?

On a $T \leq T_{max}$, donc maturité $= \theta = T - t \leq \underbrace{T_{max} - t}$

diminue quand t augmente.

4. Le code utilisé est disponible sur le web sous le nom TDCSG10.SCE. Importer ce code. Quelle valeur de r et de δ ont été utilisées ?

$r = 0.2 = 20\%$ $\quad \delta = 1.03$

Ceci correspond au taux choisi constant en fonct de la maturité dans la courbe des taux à $t=0$. Cette valeur, trop élevée pour être actuellement réaliste, a été ainsi choisie pour marquer la convexité.

5. Revenir à $r = 0.02 = 2\%$ et refaites les dessins. Qu'observez-vous ? Expliquez la différence observée

On observe que les courbes ressemblent à des droites (mais ne le sont pas : la courbe initiale est bien une exponentielle).

On observe aussi que la courbe pour $t = 2\delta t$ et $j = 2$ donne des zéros coupons supérieurs à 1, ce qui est peu réaliste (choix $\delta = 1.03$ trop grand)

6. Revenir aussi à $\delta = 1.01$ et refaites les dessins. Qu'observez-vous ? Expliquez la différence observée

- il n'y a plus de zéro-coupons supérieurs à 1.
- les courbes des taux se rapprochent les unes des autres

7. Le code utilisé trace les courbes pour $t = n\delta t$ pour $0 \leq j \leq n \leq 2$ en utilisant ces diverses valeurs explicitement. Réécrire ce code pour $0 \leq j \leq n \leq 5$ par une double boucle

`for n=0 :5 ; for j=0 : ...`

Exécutez votre programme puis recopiez cette double boucle ci-dessous.

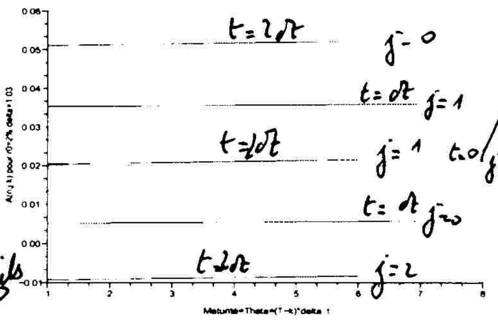
```
for n=0:5
  AbsT = zeros(Nmax+1-n);  // nb de maturités disponibles à t=nδt
  OrdoZ = zeros(Nmax+1-n);
  for j=0:n
    for kk=1:Nmax+1-n
        AbscT(kk)= k-1;
        OrdoZ(kk)= Z(n,j,n+kk-1);
    end;
    plot(AbscT, OrdoZ); // courbe à t=nδt pour j
  end;
end;
```

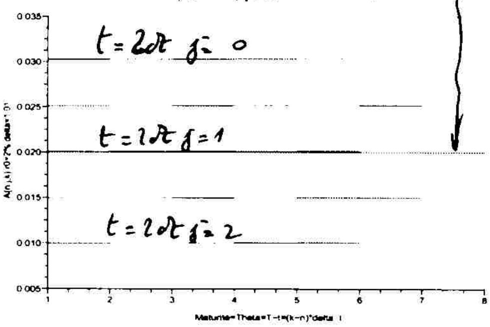
8. Faire la même étude mais cette fois pour l'arbre des courbes de taux $T \mapsto A(t,T)$. Commencez par $r = 20\%$ et $\delta = 1.03$. Représentez schématiquement les courbes obtenues pour $t = 0$, $t = \delta t$, et $t = 2\delta t$ en précisant à nouveau ces valeurs de t et de j pour chacune. Revenez à $r = 2\%$ et $\delta = 1.01$; indiquez comment ceci modifie la figure.

```
for n=0:2
AbscT=zeros(Nmax+1-n);
OrdoA=zeros(Nmax+1-n);
    for j=0:n;
        for kk=1:Nmax-n ; //kk commence toujours à 1
          AbscT(kk)=kk;    //k=n+kk
          OrdoA(kk)=A(n,j,n+kk);
        end;
     plot(AbscT,OrdoA);
    end;
end;
```

taux actuariels initiaux indépendants de la maturité $\theta = T-t$

$\delta = 1.03$

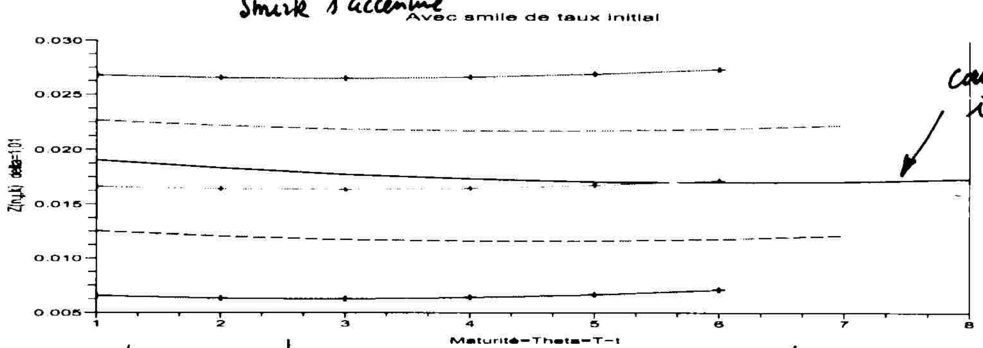




taux actuariels négatifs

Dans cet exercice on a considéré le cas d'une courbe de taux initiale correspondant à un taux actuariel r indépendant de la maturité $\theta = T - t$. On a représenté ci-dessous le même modèle, mais avec un "smile de taux" : lorsqu'on augmente la maturité (durée du prêt) les taux tout d'abord baissent puis ils réaugmentent. On voit que ce smile s'~~atténue~~ un peu lorsque t augmente.

smirk s'accentue



courbe des taux initiale avec smirk de maturité

courbe des taux initiale :

$$r(k) = r(0)\left(1 + \frac{1}{30 N_{max}} k\left(k - \frac{3}{2} N_{max}\right)\right)$$