Chapitre 9

Le modèle de Ho et Lee

Cette leçon est une modeste excursion dans un vaste et important chapitre de la finance mathématique qui concerne les taux d'intérêts et l'évaluation des produits dérivés sur ces taux. Il est beaucoup plus difficile de modéliser la dynamique des taux d'intérêt que de modéliser celle des actions, comme nous allons le voir, et pourtant c'est absolument nécessaire car il n'est pas généralement pas raisonnable de supposer, comme nous l'avons fait jusqu'ici, que le taux d'intérêt r est une constante et que sa prise en compte dans les calculs de prix d'actifs financiers peut se réduire à la prise en compte d'un actif déterministe $B_t = B_0 e^{rt}$ représentant la dynamique de B_0 Euros placés au taux constant r.

Lorsqu'on parle d'intérêts, il s'agit le plus souvent de la rémunération, sous la forme de versements périodiques, d'un prêt consenti par un préteur à un emprunteur. On explique que pour le préteur, l'intérêt est le prix de la renonciation temporaire à une consommation et pour l'emprunteur c'est le coût correspondant à une consommation anticipée.

Au fil du temps les intérêts, accusés d'appauvrir les uns au profit d'autres ont fait souvent l'objet d'interdiction ou de limitations. Ils sont perçus de façon bien différente selon les cultures et selon les religions. Ainsi la Bible (dans l'ancien testament) et le Coran contiennent des versets qui condamnent fermement la pratique du prêt à intérêts. Les choses ont été codifiées dans la religion juive par l'interdiction de demander des intérêts à ses coreligionnaires, mais pas à des "étrangers". Cette même règle a été aussi longtemps en vigueur dans la religion catholique. Les protestants ont contribués à la levée progressive de son interdiction dans les pays européens, restée en vigueur jusqu'en 1830. Pour l'islam, l'interdit subsiste et le développement récent de banques islamiques fonctionnant sur des principes différents en est une conséquence importante. Quoiqu'il en soit la question de l'intérêt reste un sujet sensible qui est encore souvent perçu différemment selon les origines culturelles des intervenants.

9.1 Actifs à flux déterministes

A coté des actions et de leur produits dérivés, il existe sur les marchés à la disposition des investisseurs une autre grande famille d'actifs financiers liés au taux d'interêt dont les plus simples sont les *obligations*. Les obligations sont des contrats qui assurent à leur détenteur à la signature du contrat un flux connu de revenus composé du *principal* versé à terme et d'une succession de *coupons* versés à des dates intermédiaires. Par exemple une obligation d'état qui rapporte 1000 Euros dans 5 ans et 3% (soit 30 Euros) tous les 6 mois pourrait s'évaluer, si le taux d'intérêt annuel r était constant sur la période, comme

$$\frac{30}{(1+r)^{\frac{1}{2}}} + \frac{30}{(1+r)} + \frac{30}{(1+r)^{\frac{3}{2}}} + \ldots + \frac{30}{(1+r)^{\frac{9}{2}}} + \frac{1000}{(1+r)^5}$$

et de façon plus générale, une obligation de principal P, d'échéance $T_{\max}$ et versant aux dates t_i, $0 < t_1 < ... < t_i < ... < t_k = T_{\max}$, les coupons c_i aurait comme valeur à l'instant $t = 0$:

$$\sum_{i=1}^{k-1} \frac{c_i}{(1+r)^{t_i}} + \frac{P}{(1+r)^{T_{\max}}}. \tag{9.1}$$

Mais cette formule n'est pas adaptée, non seulement parce que le taux r ne peut pas être considéré comme constant mais aussi parce qu'ici on fait implicitement l'hypothèse que les taux sont (quasiment) proportionnels à la durée du prêt ou de l'emprunt : en effet, si par exemple $t = 2t'$, comme $\frac{1}{(1+r)^t} = e^{-t\ln(1+r)} \simeq e^{-tr}$, on a donc $\frac{1}{(1+r)^{t'}} \simeq \frac{1}{(1+2r)^t}$. Or s'il est effectivement naturel de postuler qu'il y a une relation entre le taux pratiqué et la durée du contrat, une simple proportionnalité est cependant, dans la réalité, une hypothèse bien trop simplificatrice.

En pratique, l'évaluation va se faire en utilisant un taux variable déterminé à partir des prix observés à travers la notion de zéro-coupons, que nous définissons à présent.

Définition : Un *zero-coupon* de maturité T est un titre qui rapporte 1 Euros à une date future T fixée. Sa valeur à tout instant $t \in [0,T]$ (la durée restante étant $\theta := T - t$) se note $Z(t,T)$, ou encore Z_t^T et on a donc toujours $Z(T,T) = 1$.

Le zéro-coupon est un actif *théorique* que l'on introduit notamment comme référence pour calculer le prix des obligations. En effet, toute obligation de principal P, d'échéance T et versant aux dates t_i les coupons c_i peut s'écrire comme une simple combinaison linéaire de zéro-coupons $\sum_{i=1}^{k-1} c_i Z(t,t_i) + PZ(t,T_{\max})$ (pour tout $t < t_1$). En outre le zéro-coupon est aussi l'actif que nous allons modéliser dans le modèle de Ho et Lee présenté ci-dessous.

Comme les zéro-coupons ne sont pas des actifs effectivement disponibles sur le marché, les praticiens sont conduit à reconstituer, à chaque date t, les valeurs $Z(t,T)$ pour toutes les valeurs $t < T < T_{\max}$ à partir des prix observées à cette date t des obligations disponibles sur le marché. Dans un marché liquide où l'on dispose des prix d'un nombre suffisant d'obligations dont les dates de versements sont identiques (ou compatibles), c'est simplement un problème de résolution d'un système linéaire. S'il y a trop peu de prix observés, on utilise ceux dont on dispose et on complète la fonction $T \to Z(t,T)$ par diverses méthodes d'interpolation. Notons cependant que si, à toute date t, les valeurs des zéro-coupons $Z(t,T)$ peuvent en principe être calculées à partir des prix observés à cette date, et donc sont considérées comme connues à cette date, les valeurs $Z(t+\delta t,T)$ des zéro-coupons à la date suivante $t+\delta t$ et de façon générale les valeurs des zéro-coupons à une date future quelconque, sont parfaitement inconnues. Or ces valeurs peuvent varier con sidérablement. D'où l'utilité, mais aussi la dificulté d'une modélisation stochastique.

Remarque : En général, ce ne sont pas les prix (en Euros) des obligations qui sont relevés mais leur *taux actuariel.* Le taux actuariel est le taux (supposé constant) qu'il faudrait utiliser dans la formule (9.1) pour obtenir le prix observé noté P_0. En d'autres termes, le taux actuariel d'une obligation est défini implicitement par

$$\sum_{i=1}^{k-1} \frac{c_i}{(1+r)^{t_i}} + \frac{P}{(1+r)^{T_{\max}}} = P_0$$

où P_0 est le prix de marché. Il est utile de remarquer, pour avoir une bonne intuition, que le taux actuariel d'une obligation augmente lorsque son prix diminue et qu'il diminue lorsque son prix augmente. A noter aussi que le taux actuariel est le seul moyen de comparer les prix de deux obligations qui n'ont pas la même structure (pas les même montants de coupons et de principal et/ou pas les mêmes dates de versements).

Remarque : On peut en fait s'interroger pour savoir pourquoi un actif (comme une obligation) dont le flux de revenus est parfaitement connu (puisqu'on connait à l'avance le montants des coupons, du principal et les dates de versement), est à regarder comme stochastique. En réalité il est facile de voir que si le taux actuariel d'une obligation d'état est r_0 et si l'on veut revendre cette obligation ultérieurement à une date où le même état émet une nouvelle obligation à un taux $r_1 > r_0$, personne n'achètera cette obligation au taux r_0 car le prix de la nouvelle obligation sera inférieur. Ceci explique que le détenteur d'une obligation fait face à un risque dès que le taux peut varier.

9.2 Courbes de taux et structure par terme

A coté du zéro-coupon $Z(t,T)$, que nous avons défini comme le prix en t d'un Euro délivré en T, il y a d'autres façons de représenter les taux d'intérêt que nous allons détailler ici. On utilise par exemple le *taux zéro-coupons*, plus souvent appelé le *rendement à maturité* (Yield to maturity), qui est la fonction $(t,T) \mapsto Y(t,T)$ définie par $Z(t,T) = e^{-Y(t,T)(T-t)}$. Si l'on applique la formule (9.1) pour exprimer le prix d'un zéro-coupon $Z(t,T)$, on obtient $Z(t,T) = \frac{1}{(1+r)^{T-t}} = e^{-(T-t)\ln(1+r)}$, ce qui est peu différent de $e^{-r(T-t)}$. Ceci permet de comprendre que le taux zéro-coupons $Y(t,T)$ peut être compris comme un équivalent stochastique du taux actuariel.

Définition : Pour chaque valeur de t, le graphe de la fonction $T \to Y(t,T)$ s'appelle la *courbe de taux à* l'instant t.Elle donne à un instant t fixé l'ensemble des taux pratiqués à cet instant pour des prêts de maturité δt, $2\delta t$, ... en fonction de cette maturité. L'ensemble des courbes de taux pour les différentes valeurs de t s'appelle la *structure par terme* des taux.

La connaissance de la courbe des taux $T \to Y(t,T)$ (qui est équivalente à la connaissance des prix des zéros coupons) est importante puisqu'elle permet d'exprimer le prix de n'importe quelle obligation. Comme nous l'avons souligné, les valeurs à l'instant initial $t = 0$ peuvent être déduites des prix observés sur le marché. Pour $t > 0$ par contre, elle est inconnue et peut être considérée comme une *courbe aléatoire* (v.a. à valeurs dans un ensemble de fonctions). On comprend que pour modéliser les taux, il faut modéliser la dynamique de ces courbes de taux et non seulement la dynamique d'un prix comme dans le modèle Cos-Ross-Rubinstein, ce qui explique que ce soit plus complexe.

Une autre quantité, le *taux forward instantané*, noté $f(t,T)$ remplace aussi parfois $Z(t,T)$ ou $Y(t,T)$. Ce taux est défini implicitement à partir des zéro-coupons par la formule

$$Z(t,T) = e^{-\int_t^T f(t,u)du}.$$

Une dernière quantité, importante, est le *taux court* ou *taux instantané*, r_t. C'est le taux que les professionels utilisent pour les règlements de dettes ou d'avoirs entre eux d'un jour sur l'autre (taux à *un jour* ou *jj*). Cette quantité aléatoire représente le coût de l'argent d'un jour sur l'autre. On supposera que r_t désigne le taux d'actualisation entre les dates $t - \delta t$ et t, et donc $r_t = Z(t - \delta t, t)$ et $r_t \in \mathcal{F}_{t-\delta t}$. Si l'on connait les prix des zéro-coupons, on peut donc en déduire les valeurs de r_t. L'inverse n'est cependant pas vrai.

Du point de vue mathématique, c'est r_t que l'on utilise dans les modèles financiers où le taux d'intérêt sont supposés stochastiques, pour calculer l'actualisation. Ainsi, si X_t est le prix en t d'un actif, et $\tilde{X}_t$ son prix actualisé en $t = 0$, on aura $\tilde{X}_t = X_t/B_t$ où $B_t = (1 + r_{\delta t})(1 + r_{2\delta t}) \dots (1 + r_t)$. L'actualisation peut donc aussi s'écrire en fonction des zéro-coupons :

$$\frac{1}{B_t} = \frac{1}{1 + r_{\delta t}} \frac{1}{1 + r_{2\delta t}} \cdots \frac{1}{1 + r_t} = Z(0, \delta t) Z(\delta t, 2\delta t) \dots Z(t - \delta t, t).$$

On peut voir B_t comme la valeur aléatoire d'une compte d'épargne ayant un dépot initial de 1 Euros et rapportant des intérêts sur la base du taux cours observé au jour le jour.

9.3 Le modèle de Ho et Lee pour les zéro-coupons

On veut maintenant introduire l'équivalent, pour les taux d'intérêt, du modèle de Cox-Ross-Rubinstein pour les actions, c'est-à-dire un modèle binomial. Comme il s'agit cette fois d'un modèle de taux, sa particularité est que les valeurs de la marche aléatoire ne sont plus des *nombres* mais des *courbes*

$$T \mapsto Z_t^T = Z(t,T) \ \ , \ \ t \le T \le T_{\max} \ \ , \ \ t \in \mathbb{T} := [0..T_{\max}]_{\delta t} \ \ , \ \ \delta t := T_{\max}/n.$$

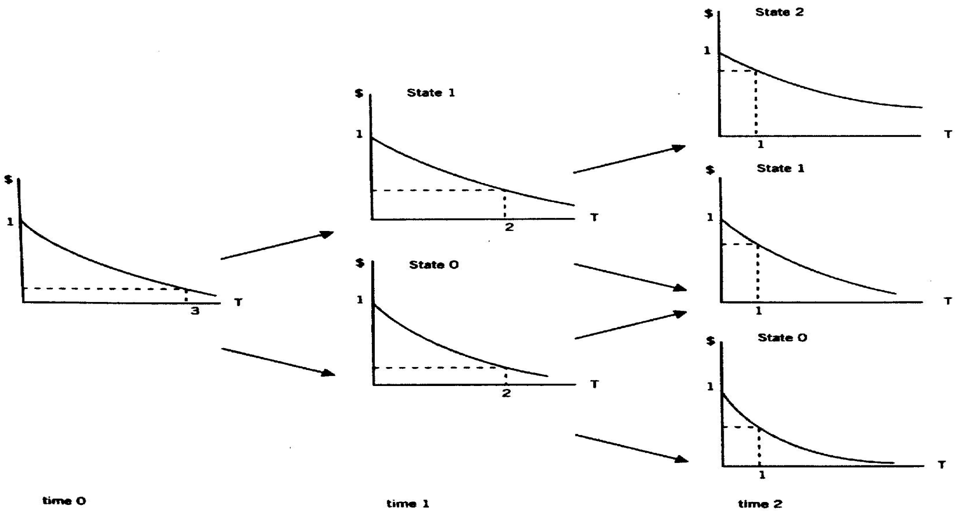
L'idée de ce modèle est de généraliser au cas stochastique la relation $Z(s,t)Z(t,u) = Z(s,u)$ pour tout $s \le t \le u$, appelée *relation de rollover*. Dans le cas de taux d'intérêt déterministes, il est en effet facile de se convaincre que cette relation doit être satisfaite puisque le terme de gauche est précisément égal à la quantité à investir à l'instant s pour avoir en t le montant précis qu'il faut investir à cet instant pour avoir un Euros à l'instant u. Mais ceci est aussi la quantité égale au terme de droite. Lorsqu'on réécrit cette relation sous la forme, $Z(t,u) = \frac{Z(s,u)}{Z(s,t)}$, on remarque que les valeurs de $Z(s,t)$ et $Z(s,u)$ étant connues à l'instant s, la relation permet de prévoir à l'instant s la valeur de $Z(t,u)$ qui, elle, est inconnue à cette date. Pour leur modèle stochastique Ho et Lee ont eu l'idée de transformer cette égalité en une récurrence stochastique

$$Z(t,u) = \frac{Z(s,u)}{Z(s,t)} \eta(s,t,u). \tag{9.2}$$

où $\eta = \eta(s,t,u)$ est une v.a. pouvant prendre deux valeurs selon que $u = 0$ ou $u = 1$. Plus précisément, on se donne une fonction déterministe $(\theta, x) \mapsto \eta(\theta, x)$ (que l'on présisera plus loin) telle que

$$Z_{t+\delta t}^T = \frac{Z_t^T}{Z_t^{t+\delta t}} \eta(\theta_{t+\delta t}^T, X_{t+\delta t}), \tag{9.3}$$

où $\theta_s^T := T - s$ est le temps qui reste en $t = s$ jusqu'à la maturité $t = T$. L'idée de ce modèle est illustrée par la figure suivante tirée de l'article original de Ho et Lee.



Comme dans le modèle de Cox-Ross-Rubinstein, $Z_{i\delta t}$ prend $i+1$ valeurs, selon le nombre de "up", $j = J_i(\omega)$, où $J_i = \delta J_1 + \ldots + \delta J_i$, $(\delta J_i)_{i\geq 1}$ étant des v.a. de Bernoulli indépendentes et de loi $\delta J_i \rightsquigarrow \mathcal{B}(\pi_i, 1)$. On définit la filtration $\mathbb{F} = (\mathcal{F}_t)_{t\in\mathbb{T}}$, par $\mathcal{F}_0 = \{\emptyset, \Omega\}$, et pour$k \geq 1$, $\mathcal{F}_{k\delta t} = \sigma(\delta J_1, \ldots, \delta J_k) = \sigma(X_{\delta t}, \ldots, X_{k\delta t})$, avec $X_{i\delta t} = \delta J_i$. Les fonctions aléatoires $Z_t : [t..T\text{max}] \to \mathbb{R}^+$, $T \mapsto Z_t^T$, sont choisies $\mathcal{F}_t$-measurables, et même $\sigma(J_i)$-measurables pour $t = i\delta t$.

Nous allons montrer à présent que pour ce modèle la fonction η doit nécessairement prendre une forme particulière assez simple et donc que ce modèle ne dépend en fait que de 3 paramètres.

9.3.1 Un model à trois paramètres : π, δ, et n

Condition d'absence d'opportunité d'arbitrage

La première contrainte concerne l'absence d'opportunité d'arbitrage : pour tout $T \in \mathbb{T}$, la valeur actualisée de Z_t^T doit être une martingale. Pour cela on doit avoir pour tout $t \in [0..T-\delta t]$

$$Z_t^T = \mathbb{E}^*(Z_t^{t+\delta t} Z_{t+\delta t}^T \mid \mathcal{F}_t).$$

En utilisant (9.3), il vient

$$\begin{aligned} Z_t^T &= \mathbb{E}^*(Z_t^{t+\delta t} Z_{t+\delta t}^T \mid \mathcal{F}_t) = \mathbb{E}^*(Z_t^T \eta(\theta^T(t+\delta t), X_{t+\delta t}) \mid \mathcal{F}_t) \\ &= Z_t^T \mathbb{E}^*(\eta(\theta^T(t+\delta t), X_{t+\delta t}) \mid \mathcal{F}_t) = Z_t^T \mathbb{E}^*(\eta(\theta^T(t+\delta t), X_{t+\delta t})). \end{aligned}$$

puisque $X_{t+\delta t}$ est indépendent of $\mathcal{F}_t$. Donc, en divisant par Z_t^T on obtient,

$$1 = \pi_i \eta(\theta, 0) + (1-\pi_i)\eta(\theta, 1). \tag{9.4}$$

pour tout $\theta = \theta_{t+\delta t}^T \in [\delta t..T\text{max}]_{\delta t}$ Il en résulte que $\pi_i = (1-\eta(\theta,1))/(\eta(\theta,0)-\eta(\theta,1))$ ne peut changer avec i et doit être constant (égal à π). De plus, en utilisant (9.3) pour $t' := T - \delta t$, on a aussi $\theta_{t'+\delta t}^T = \theta_T^T = 0$, et

$$1 = Z_T^T = Z_{t'+\delta t}^T = \frac{Z_{t'}^T}{Z_{t'}^{t'+\delta t}} \eta(\theta_{t'+\delta t}^T, X_{t'+\delta t}) = \frac{Z_{T-\delta t}^T}{Z_{T-\delta t}^{T-\delta t+\delta t}} \eta(\theta_T^T, X_T)$$

pour $X_T \in \{0,1\}$. Donc $\eta(0,x) = 1$ pour tout $x \in \{0,1\}$. D'où la proposition suivante :

Proposition 9.1 *Tout model de taux d'intérêt satisfaisant (9.3), avec les $X_{t_i} \rightsquigarrow \mathcal{B}(\pi_i, 1)$ independents, est sans arbitrage si et seulement si $\eta(0,x) = 1$ pour tout $x \in \{0,1\}$, et si les π_i sont égaux et que leur valeur commune π satisfait la relation*

$$1 = \pi\eta(\theta, 0) + (1-\pi)\eta(\theta, 1). \tag{9.5}$$

Condition binomiale

A présent, en utilisant le fait que pour $t = i\delta t$, Z_t^T ne dépend que de J_i, on a le résultat suivant qui fixe la forme de la fonction η :

Proposition 9.2 *Sous la condition de non arbitrage, pour tout* $\theta \in [0..T - \delta t]_{\delta t}$, *on a :*

$$\eta(\theta + \delta t, 1)\eta(\theta, 0)\eta(\delta t, 0) = \eta(\theta + \delta t, 0)\eta(\theta, 1)\eta(\delta t, 1), \tag{9.6}$$

et donc

$$\eta(\theta, 0) = \frac{1}{\pi + (1-\pi)\delta^{\frac{\theta}{\delta t}}} \ , \ \eta(\theta, 1) = \delta^{\frac{\theta}{\delta t}}\eta(\theta, 0) \ , \ \textit{avec } \delta := \frac{\eta(\delta t, 1)}{\eta(\delta t, 0)} > 1. \tag{9.7}$$

Preuve : Cette formule est une conséquence du fait que le modèle doit être binomial, c'est-à-dire que, pour $t = i\delta t$, Z_t^T ne doit dépendre que de $j = J_i(\omega)$ et non des valeurs particulières de $\delta J_1(\omega), \ldots, \delta J_i(w)$ dont la somme vaut $J_i(\omega)$. Ceci n'est vrai que si l'arbre est *recombinant*, c'est-à-dire si un *up* suivi d'un *down* donne le même résultat qu'un *down* suivi d'un *up*. En d'autres termes, pour $\omega' \in \Omega$ et $\omega'' \in \Omega$ tels que $J_i(\omega') = J_i(\omega'') = j$ et $J_{i+2}(\omega') = J_{i+2}(\omega'') = j + 1$, mais $\delta J_{i+1}(\omega') = 1$ et $\delta J_{i+2}(\omega') = 0$ tandis que $\delta J_{i+1}(\omega'') = 0$ et $\delta J_{i+2}(\omega'') = 1$, les valeurs de $Z_{i\delta t}^T$ et de $Z_{(i+2)\delta t}^T$ ne doivent pas dépendre du fait que $\omega = \omega'$ ou $\omega = \omega''$.

Posons $\theta = \theta_{t+2\delta t}^T$ et appliquons deux fois (9.3) :

$$\begin{aligned} Z_{t+2\delta t}^T &= \frac{Z_{t+\delta t}^T}{Z_{t+\delta t}^{t+2\delta t}}\eta(\theta, X_{t+2\delta t}) = \frac{Z_t^T}{Z_t^{t+\delta t} Z_{t+\delta t}^{t+2\delta t}}\eta(\theta, X_{t+\delta t})\eta(\theta, X_{t+2\delta t}) \\ &= \frac{Z_t^T}{Z_t^{t+2\delta t}\eta(\delta t, X_{t+\delta t})}\eta(\theta, X_{t+\delta t})\eta(\theta, X_{t+2\delta t}) \ , \text{ again by (9.3)} \end{aligned}$$

Donc comme $J_i(\omega') = J_i(\omega'')$ et $J_{i+2}(\omega') = J_{i+2}(\omega'')$, et comme $Z_{t+2\delta t}^T$, Z_t^T, et $Z_t^{t+2\delta t}$ ne dépendent pas du fait que $\omega = \omega'$ ou que $\omega = \omega''$, il en sera de même de

$$\frac{\eta(\theta + \delta t, X_{t+\delta t})\eta(\theta, X_{t+2\delta t})}{\eta(\delta t, X_{t+\delta t})}.$$

L'égalité des deux valeurs obtenues selon que $\omega = \omega'$ ou $\omega = \omega''$, donne

$$\frac{\eta(\theta + \delta t, 1)\eta(\theta, 0)}{\eta(\delta t, 1)} = \frac{\eta(\theta + \delta t, 0)\eta(\theta, 1)}{\eta(\delta t, 0)}.$$

A présent, comme d'après (9.5) on a $\eta(\theta, 1) = \frac{1}{1-\pi}(1 - \pi\eta(\theta, 0))$, donc (9.3) devient

$$\frac{1}{1-\pi}(1 - \pi\eta(\theta + \delta t, 0)\eta(\theta, 0)\eta(\delta t, 0) = \frac{1}{(1-\pi)^2}\eta(\theta + \delta t, 0)(1 - \pi\eta(\theta, 0))(1 - \pi\eta(\delta t, 0)). \tag{9.8}$$

Posons $x_n = \frac{1}{\eta(\theta,0)}$, $x_{n+1} = \frac{1}{\eta(\theta+\delta t,0)}$, et donc $x_1 = \frac{1}{\eta(\delta t,0)}$, l'égalité (9.8) devient

$$(1-\pi)\left(1 - \frac{\pi}{x_{n+1}}\right)\frac{1}{x_n}\frac{1}{x_1} = \frac{1}{x_{n+1}}\left(1 - \frac{\pi}{x_n}\right)\left(1 - \frac{\pi}{x_1}\right).$$

Soit, en multipliant les deux termes par $x_1 x_n x_{n+1}$, on obtient $(1-\pi)(x_{n+1} - \pi) = (x_n - \pi)(x_1 - \pi)$, ou, de manière équivalente, $x_{n+1} = \pi + \frac{1}{1-\pi}(x_n - \pi)(x_1 - \pi) =: x_n\delta + \gamma$, avec $\delta = \frac{x_1 - \pi}{1-\pi}$ et $\gamma = \pi - \frac{\pi}{1-\pi}(x_1 - \pi) = \pi(1-\delta)$. Comme $x_1 = \frac{1}{\eta(\delta t,0)}$, on obtient $\eta(\delta t, 0) = \frac{1}{\pi + (1-\pi)\delta}$. Et comme $1 = \pi\eta(\delta t, 0) + (1-\pi)\eta(\delta t, 1)$,

$$\delta = \frac{1}{1-\pi}\left(\frac{1}{\eta(\delta t, 0)} - \pi\right) = \frac{1}{1-\pi}\frac{1 - \pi\eta(\delta t, 0)}{\eta(\delta t, 0)} = \frac{\eta(\delta t, 1)}{\eta(\delta t, 0)}.$$

Finalement, en résolvant $x_n = x_{n-1}\delta + \pi(1-\delta)$ il vient $x_n = (1-\pi)\delta^n + \pi$, d'où

$$\eta(\theta, 0) = \eta(n\delta t, 0) = \frac{1}{x_n} = \frac{1}{\pi + (1-\pi)\delta^n} = \frac{1}{\pi + (1-\pi)\delta^{\frac{\theta}{\delta t}}},$$

et

$$\eta(\theta, 1) = \frac{1}{1-\pi} - \frac{\pi}{\pi + (1-\pi)\delta^{\frac{\theta}{\delta t}}} = \frac{\delta^{\frac{\theta}{\delta t}}}{\pi - (1-\pi)\delta^{\frac{\theta}{\delta t}}} = \delta^{\frac{\theta}{\delta t}}\eta(\theta, 0).$$

□