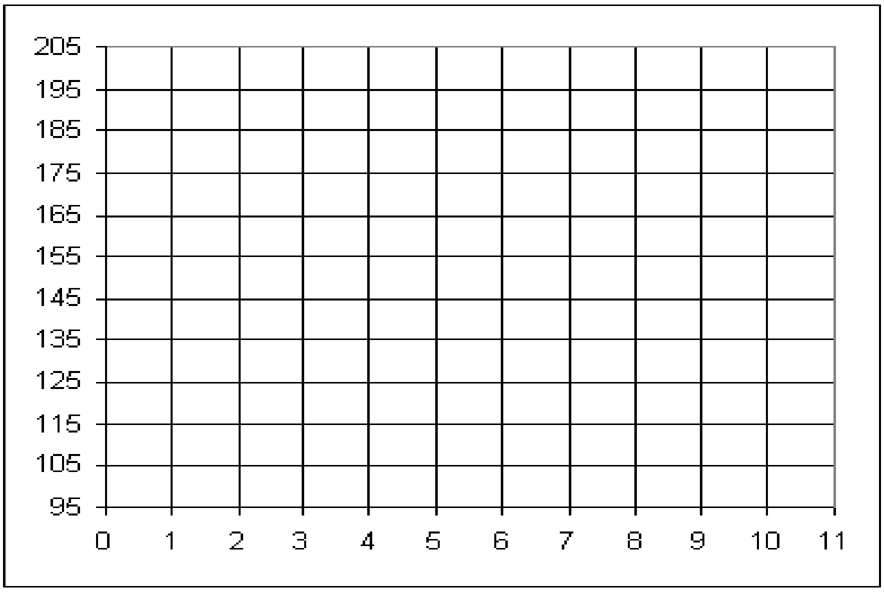
Université de Nice | L3MASS, année 2012-2013
Département de Mathématiques | Calcul stochastique et Finance
NOM : Date : .
PRENOM : Groupe : .

Feuille-réponses du TP 1
Les trajectoires d'un modèle CRR à n étapes

Charger Scilab puis ouvrir un éditeur. Saisir successivement les parties du programme ci-dessous se rapportant à l'exercice concerné. A noter qu'on n'executera JAMAIS l'ensemble du programme d'un seul coup ni aucune partie dont on ne comprend pas le sens !

Exercice 1. : Calcul de la marche CRR On rappelle que la marche CRR S_t est définie par sa valeur initiale S_0 et la relation $S_{t+\delta t} = S_t U_t$, avec $U_t \in \{\texttt{up}, \texttt{down}\}$. On choisit ici $up = e^{+\frac{\sigma}{\sqrt{n}}}$ et $down = e^{-\frac{\sigma}{\sqrt{n}}}$, où σ est une constante (la volatilité de l'actif) et n le nombre d'étapes, $T = n\delta t$. Pour les calculer on range les valeurs de S_t dans une matrice triangulaire [1] $S(i,j) = SS(i+1, j+1)$, où $i = 0, \ldots, n$ est l'indice du pas de temps $t = i\delta t$ et $j = 0, \ldots, i$ le nombre de *up* intervenus avant t. Calculer au moyen de Scilab les valeurs de S_t dans un modèles à $n = 3$ étapes puis représenter sur le dessin suivant les 10 points de coordonnées $(i, S(i,j))$ pour $i = 0, \ldots, 3$ et $j = 0, \ldots, i)$ en les liant pour former le dbut de l'arbre CRR de ce modèle. Attention au décallage d'une unité de i et j pour l'ordonnée $S(i,j) = SS(1+i, 1+j)$ de ces points !



Comment le dessin (et donc le modle) volue-t-il lorsque σ augmente ?

1. La numérotation des lignes et des colonnes d'une matrice par Scilab commence à 1 et non 0 !

Exercice 2. : Reprsentation d'une trajectoire Une trajectoire de la marche CRR est caractérisée par une suite de `up` et de `down` que nous représenterons par une suite de 1 et de 0. On désigne par $J(i)$ la fonction qui donne pour une trajectoire le nombre de `up` entre l'instant $t = 0$ et l'instant $t = i\delta t$. Ainsi pour la trajectoire donnée par la suite $0, 1, 0, 0, 0, 1, 0$, $J(2) = J(5) = 1$ et $J(6) = 2$.

1. Modifier la valeur de n dans la premire partie de votre programme et, en utilsant l'aide en ligne au besoin, examiner la seconde partie et tacher d'en comprendre chaque instruction. Excuter le code, dcrire la figure obtenue et expliquer les instructions utilises.

2. Faire tracer par `Scilab` plusieurs trajectoires en changeant la suite des 0 et 1. Comment obtenir une trajectoire dont les deux extrmits sont $S0$? Indiquer la valeur la plus grande possible pour une trajectoire.

Exercice 3. : Simulation d'une suite aléatoire de 0 et de 1

1. La fonction `rand()` de Scilab (comme la touche `random` d'une calculette) renvoit un nombre aléatoire compris entre 0 et 1, distribué selon une loi uniforme sur $[0, 1]$. Si l'on précise `rand(m,n)`, on obtient une matrice de taille $m \times n$ dont toutes les composantes sont des nombres aléatoires distribués selon une loi uniforme sur $[0, 1]$. Faire quelques essais pour diverses (petites) valeurs de m et de n. La fonction `3*rand()-2` renvoit encore un nombre aléatoire, mais il n'est plus distribué selon une loi uniforme sur $[0, 1]$. Faire quelques essais puis déterminer quelle loi est simulée par cette fonction.

2. La suite des instructions suivantes permet de vérifier si la loi simulée est bien une loi uniforme : `x=rand(1,1000) ;histplot(11,x)`. Expliquer ce que vous voyez sur la figure produite.

3. La fonction `int(0.75+rand())` renvoit encore un nombre aléatoire, mais il n'est plus distribué selon une loi uniforme sur $[0, 1]$. Faire quelques essais puis déterminer quelle loi est simulée par cette fonction. Expliquer.

Exercice 4. : Simulation de M trajectoires de CRR

1. On souhaite à présent simuler un nombre M de trajectoires de la marche CRR. Que retourne `int(p+rand(n,M))` (pour un $p \in]0,1[$ donné) ? et, si l'on pose `deltaJ=int(p+rand(n,M))`, que retourne `cumsum(deltaJ)` ?

2. On suppose $n = 150$. Simuler $M = 50$ trajectoires en choisissant $p = 0.5$. Expliquer ce que vous obtenez.

Exercice 5. : Loi de la marche CRR à l'instant T. Représentez un histogramme des valeurs finales (on prendra par exemple $n = 250$) des trajectoires aléatoires de CRR ; pour cela, on simulera $M = 400$ trajectoires au moins et on prendra par exemple `int(sqrt(M))` pour nombre de classes de l'histogramme. Indiquer l'allure de l'histogramme obtenu. Expliquer.

```
//Exercice 1 : Calcul de la marche de CRR /////////////
n=3 ;T=1 ;delta_t=T/n ;
SS=zeros(n+1,n+1) ;
S0=145 ;sigma=0.25 ;
up=exp(sigma*sqrt(delta_t)) ;down=1/up ;
SS(1,1)=S0 ;
for i=1:n
SS(i+1,0+1)=SS(i,0+1)*down ; // ici j=0
for j=1:i
SS(i+1,j+1)=SS(i,j)*up ;
end ;
end ;
// Exercice 2 : Tracé d'une trajectoire de CRR ; ici on choisit n=10//////
deltaJ=[1 1 0 0 0 1 0 0 1 1] ;
J=cumsum(deltaJ) ;
ttraj=zeros(1,n+1) ;
ttraj(1)=SS(1,1) ;
for i=1:n
ttraj(i+1)=SS(i+1,J(i)+1) ;
end ;
xset("window",1) ;
plot2d(0:10,ttraj) ;
// Exercice 3 : Simulation d'une suite de 0 et de 1 //////////////////
x=rand(1,1000) ;
xset("window",2) ;
histplot(11,x) ;
// Exercice 4 : Simulations de M trajectoires de CRR /////////////////
M=200 ; n=100 ;
MdeltaJ=int(0.5+rand(M,n)) ;
MJ=cumsum(MdeltaJ,"c") ;
Mttraj=zeros(M,n+1) ;
for m=1:M
Mttraj(m,1)=S0 ;
for i=1:n
Mttraj(m,i+1)=SS(i+1,MJ(m,i)+1) ;
end ;
end ;
xset("window",3) ;
for m=1:M
plot2d(0:n,Mttraj(m,1:n+1)) ;
end ;
// Exercice 5 : Loi de la marche CRR l'instant T ; ici on choisira M=400.///////
xset("window",4) ;
histplot(int(sqrt(M)),Mttraj(1:M,n+1)) ;
```