

Calcul stochastique : feuille réponses du TP 10
Etude de la convergence du prix CRR vers le prix BS

On reprend les notations des TP précédents, avec les constantes suivantes $T = 1$, $\sigma = 0.4$, $S_0 = 140$ et $r = 0.05$. On commencera par $n = 6$ pour la mise au point puis on traitera les valeurs plus grandes de n demandées.

Exercice 1. : Créer un nouveau code Scilab et y définir successivement les 5 quantités $\delta t = T/n$, $R = e^{r\delta t}$, $up = e^{\sigma\sqrt{\delta t}}$, $down = e^{-\sigma\sqrt{\delta t}}$ et $p = (R - d)/(u - d)$ comme 5 fonctions de n .

Combien trouvez-vous pour p lorsque $n = 12$, $n = 35$, $n = 120$?

Exercice 2. : Expliquez ce que calcule le code Scilab suivant (en commentant chaque groupe de 3 lignes séparément).

```
//La fonction S
function y=S(i,j,n);
y=S0.*(up(n)).^j.*(down(n)).^(i-j);
endfunction;
//La fonction C
function phi=phi(S);
phi=max(S-K,0);
endfunction;
function z=C(i,j,n);
z=(phi(S(n,j:(j+n-i),n))*binomial(p(n),n-i)')/R(n)^(n-i);
endfunction;
//Trace du Call en fonction de n
Nmax=250;CCall=zeros(Nmax);
for n=1:Nmax, Call(n)=C(0,0,n); end;
plot2d(10:Nmax,Call(10:Nmax));
```

Exercice 3. : Ajouter le code précédent à votre code. L'utiliser pour calculer le prix du Call pour $K = 135$ lorsque $n = 20$. Quelle valeur trouvez-vous ?

Que savez-vous des oscillations observées sur le graphique ? Pensez-vous qu'elles convergent et si oui, que savez-vous de leur limite ?

Exercice 4. : Reprendre le dessin dans le cas d'un Call à la monnaie. Qu'observez-vous ?

Faire le tracé correspondant pour un Put d'abord avec $K = 135$ puis avec $K = 140$. Qu'observez-vous ?

Exercice 5. : Montrer que si l'on pose $\operatorname{erf}(x) = \frac{2}{\sqrt{\pi}} \int_0^x e^{-t^2} dt$, la fonction de répartition d'une loi normale centrée réduite $\mathcal{N}(x)$ vérifie $\mathcal{N}(x) = (1 + \operatorname{erf}(x/\sqrt{2}))/2$.

Définir une fonction `BlackScholes(S,K,r,T,σ)` donnant la valeur du Call de prix d'exercice K à la date d'exercice T lorsque le taux (constant) vaut r et la volatilité est égale à σ , en utilisant la formule de Black et Scholes

$$C = S\mathcal{N}(d_1) - Ke^{-rT}\mathcal{N}(d_2), \text{ avec } d_1 = \frac{1}{\sigma\sqrt{T}} \left[\ln \frac{S_0}{K} + T \left(r + \frac{\sigma^2}{2} \right) \right] \text{ et } d_2 = d_1 - \sigma\sqrt{T}.$$

Quel prix C trouvez-vous pour $K = 135$ et toujours les mêmes autres valeurs des paramètres ? (On pourra utiliser la fonction `erf` de Scilab.)

Ajouter une droite horizontale d'ordonnée C sur le dessin des oscillations des prix CRR. Qu'observez-vous ?

