Université de Nice — L3MASS, année 2012-2013
Département de Mathématiques — Calcul stochastique et Finance
NOM : Date : .
PRENOM : Groupe : .

Calcul stochastique : TP 11
Evolution de la courbe des taux dans un modèle de Ho et Lee

On reprend les notations du TP précédent pour le modèle de taux de Ho et Lee. Le zéro-coupon Z_t^T, $t, T \in [0..T_{\max}]_{\delta t} =: \mathbb{T}$, $\delta t := T_{\max}/N$, $t \leq T$, désigne la valeur à la date t d'un contrat assurant le paiement de 1 EUR à la date T. Rappelons qu'il satisfait à la récurrence :

$$Z_t^T = \frac{Z_{t-\delta t}^T}{Z_{t-\delta t}^t}\eta(\theta^T(t), X_t) \text{ , où } \theta^T(t) := T - t, \tag{1}$$

pour une fonction η définie par le choix d'un $\delta > 1$, caractérisant, avec $\pi \in]0,1[$, le modèle retenu, par

$$\eta(\theta, 0) := \frac{1}{\pi + (1-\pi)\delta^{\frac{T-t}{\delta t}}} \text{ et } \eta(\theta, 1) = \eta(\theta, 0) \cdot \delta^{\frac{T-t}{\delta t}} \tag{2}$$

Les valeurs des Z_0^T, valeurs spot des zéros-coupons observées sur le marché à l'instant $t = 0$, sont choisies comme dans le TP précédent. On définit le taux court, "sans risque" r_t, par

$$Z_t^{t+\delta t}(1 + r_{t+\delta t}) = 1$$

. On voit donc que $r_{t+\delta t}$ est $\mathcal{F}_t$-mesurable (on dit que le processus $(r_t)_{t\in\mathbb{T}^*}$ est $\mathbb{F}$-*prévisible*) ; on pose

$$B_t := (1 + r_{\delta t})(1 + r_{2\delta t}) \dots (1 + r_t) \text{ et } \tilde{Z}_t^T := Z_t^T / B_t.$$

Les constantes sont, comme précédemment $T_{\max} = N$ (et donc δt = 1=`delta_t`), t =`n*delta_t`, T =`k*delta_t`, $J_t(\omega)$ =`j`, $T - t$ =`l*delta_t`, $\eta(T - t, X_t(\omega))$ =`eta(l*delta_t,x)`, pour `x=` $X_t(\omega)$, $Z_t^T(\omega)$ =`Z(n,j,k)`, pour $J_t(\omega)$ =`j`, avec les choix π =`pi:=0.5`, et δ =`delta:=1.01`. On suppose toujours que le taux JJ initial $r_{\delta t}$ est de 2% et que la courbe des taux initiale correspond à un taux indépendant de la maturité T. Le taux actuariel d'un zéro-coupon, noté A_t^T (ou $a(t,T)$) et défini par $Z_t^T(1 + A_t^T)^{\frac{T-t}{\delta t}} = 1$ est calculé au moyen de la fonction `A(n,j,k)`.

On a représenté sur la page suivante quelques courbes des taux à divers instants t =`n*delta_t`obtenues en calculant la matrice `ZZ` puis en définissant les fonctions `Z(n,j,k) et A(n,j,k)` par

```
// pour s'affranchir de "+1" dans les 3 arguments de ZZ,
//on introduit la fonction Z:
function z=Z(n,j,k) //t=n*delta_t et T=k*delta_t
z=ZZ(n+1,j+1,k+1) ;
endfunction ;
// Calcul du taux actuariel A(t,T) associe au zero coupon Z(t,T):
function a=A(n,j,k)
a=exp(-log(Z((n),j,k))'./((k)-(n)))-1 // attention: n<k
endfunction ;
```

et en utilisant le code suivant :

```
//evolution de la courbe des taux
xset("window",5) ;
// t=0
AbscT=zeros(Nmax+1) ;
OrdoZ=zeros(Nmax+1) ;
for kk=1:Nmax+1  ; //kk commence toujours 1
AbscT(kk)=kk-1 ;
OrdoZ(kk)=Z(0,0,kk-1) ;
end ;
plot2d(AbscT,OrdoZ) ;
// t=delta_t
AbscT=zeros(Nmax) ;
OrdoZ=zeros(Nmax) ;
```

```
for kk=1:Nmax ; //kk commence toujours 1
AbscT(kk)=kk-1;
OrdoZ(kk)=Z(1,0,kk+1-1);//apres un "down"
end;
plot(AbscT,OrdoZ,"--r");
for kk=1:Nmax ; //kk commence toujours 1
AbscT(kk)=kk-1;
OrdoZ(kk)=Z(1,1,kk+1-1);//aprs un "up"
end;
plot(AbscT,OrdoZ,"--b");
// t=2*delta_t
AbscT=zeros(Nmax-1);
OrdoZ=zeros(Nmax-1);
//j=0
for kk=1:Nmax-1 ; //kk commence toujours 1
AbscT(kk)=kk-1;
OrdoZ(kk)=Z(2,0,kk+2-1);
end;
plot(AbscT,OrdoZ,"-+r");
//j=1 , AbscT inchang
OrdoZ=zeros(Nmax);
for kk=1:Nmax-1 ; //kk commence toujours 1
OrdoZ(kk)=Z(2,1,kk+2-1);//j=0
end;
plot(AbscT,OrdoZ,"-+g");
//j=2 , AbscT inchang
OrdoZ=zeros(Nmax);
for kk=1:Nmax-1 ; //kk commence toujours 1
OrdoZ(kk)=Z(2,2,kk+2-1);//j=0
end;
plot(AbscT,OrdoZ,"-+b");
```

1. On se propose d'étudier comment la courbe des zéros coupons $T \mapsto Z(t,T)$ se déforme lorque t passe de $t = 0$ à $t = \delta t$, $t = 2\delta t$, représentées sur la figure ci contre. Combien de courbes sont représentées ?

2. Pour chacune des courbes représentées, indiquer *sur la figure à* quelle valeur de $t \in \{0, \delta t, 2\delta t\}$ elle correspond et à quelle valeur de `j`.
3. Pourquoi les courbes sont-elles de longueurs différentes ?

4. Le code utilisé est disponible sur le web sous le nom `TDCSG10.SCE`. Importer ce code. Quelle valeur de r et de δ ont été utilisées ?

5. Revenir à $r = 0.02 = 2\%$ et refaites les dessins. Qu'observez-vous ? Expliquez la différence observée

6. Revenir aussi à $\delta = 1.01$ et refaites les dessins. Qu'observez-vous ? Expliquez la différence observée

7. Le code utilisé trace les courbes pour $t = n\delta t$ pour $0 \leq j \leq n \leq 2$ en utilisant ces diverses valeurs explicitement. Réécrire ce code pour $0 \leq j \leq n \leq 5$ par une double boucle
   `for n=0:5 ; for j=0: ...`
   Exécutez votre programme puis recopiez cette double boucle ci-dessous.

8. Faire la même étude mais cette fois pour l'arbre des courbes de taux $T \mapsto A(t, T)$. Commencez par $r = 20\%$ et $\delta = 1.03$. Représentez schématiquement les courbes obtenues pour $t = 0$, $t = \delta t$, et $t = 2\delta t$ en précisant à nouveau ces valeurs de t et de j pour chacune. Revenez à $r = 2\%$ et $\delta = 1.01$; indiquez comment ceci modifie la figure.

Dans cet exercice on a considéré le cas d'une courbe de taux initiale correspondant à un taux actuariel r indépendant de la maturité $\theta = T - t$. On a représenté ci-dessous le même modèle, mais avec un "smile de taux" : lorsqu'on augmente la maturité (durée du prêt) les taux tout d'abord baissent puis ils réaugmentent. On voit que ce smile s'atténue un peu lorsque t augmente.