

NOM :
PRENOM :

Date : 6 Fvrier 2013
Groupe :

Calcul Stochastique et applications à la finance
Feuille-réponses du TP 2
Prix d'une option dans un modèle CRR

L'objet de cet séance est de calculer dans un modèle de Cox-Ross-Rubinstein à n étapes le prix d'une option Call et celui d'une option Put de pay-off respectifs $\varphi(S) = (S - K)^+$ et $\varphi(S) = (K - S)^+$. Dans un premier temps nous considérons les Call et les Put à *la monnaie*, c'est-à-dire que nous supposons leur prix d'exercice égal à $K = S_0$. Rappelons que dans le modèle de Cox-Ross-Rubinstein, les prix sont modélisés par une marche aléatoire S_t définie par $S_0 = S_0$ et $S_{t+\delta t} = S_t U_t$, avec $U_t \in \{\text{up}, \text{down}\}$. On pose à nouveau

$$n = 100 \quad T = 1 \quad \delta t = T/n \quad \text{up} = e^{+\sigma\sqrt{\delta t}} \quad \text{down} = e^{-\sigma\sqrt{\delta t}} \quad \sigma = 0.25 \quad S_0 = 145.$$

Et on introduit comme dans le TP1 la notation $S(i, j) = SS(i + 1, j + 1)$.

En utilisant le programme du TP1, recalculer les valeurs de SS pour $i \in \{0, \dots, n\}$ et $j \in \{0, \dots, i\}$.

1. Les valeurs de $SS(7, 3)$, $SS(12, 7)$ et $SS(101, 51)$ sont-elles plus grandes ou plus petites que S_0 . Expliquer pourquoi.

2. Quelles valeurs trouvez-vous pour $SS(7, 3)$ lorsque la volatilité σ vaut 0.4? Comparez avec le cas précédent et expliquez.

3. On sait que le prix $c(t, S_t)$ d'un portefeuille de couverture d'une option ayant pour pay-off φ et de date d'exercice T peut se calculer par récurrence rétrograde : on connaît c à l'instant T puisque $c(T, S_T) = \varphi(S_T)$ puis, pour tous les $0 \leq t \leq T - \delta t$, on pose $c(t, S_t) = (pc(t + \delta t, S_t u) + (1 - p)c(t + \delta t, S_t d))/R$ où p est la probabilité risque neutre et R le coefficient d'actualisation. En notant $C(i, j) := c(i\delta t, S(i, j))$, on a donc, pour $i = n$ $C(n, j) = \varphi(S(n, j))$, puis pour $0 \leq i \leq n - 1$ $C(i, j) = (pC(i + 1, j + 1) + (1 - p)C(i + 1, j))/R$. On va à présent utiliser cette récurrence rétrograde pour calculer le prix d'un Call à la monnaie.

On revient à une volatilité $\sigma = 0.25$ et on choisit un taux d'intrt $r = 0.1$.

Sous `scilab`, pour le même raisons que pour S , on posera $CC(1+i, 1+j) = C(i, j)$.

Compléter le code Scilab ci-dessous calculant les valeurs $CC(i, j)$ d'une option Call d'échéance $T = 1$ dans un modèle à $n = 100$ étapes (2 lignes incomplètes).

```
r=0.1;R=exp(r*delta_t);K=S0;
p=(R-down)/(up-down);
function phi=phi(S);
phi=max(S-K,0);
endfunction;
CC=zeros(n+1,n+1);
for j=0:n
CC(1+n,1+j)=.....;
end;
for i=n-1:-1:0
for j=0:i
CC(1+i,1+j)=.....;
end;
end;
```

4. Quelle valeur trouvez-vous pour la *prime* $c(0, 0) = CC(1, 1)$ d'un Call à la monnaie?

5. Comparez avec le prix lorsque σ vaut 0.4. Expliquez la différence.

6. Quel est le prix du Call la monnaie la date $t = 3\delta_t$ si le cours de l'actif sous jacent n'a fait qu'augmenter depuis la date de souscription du contrat? Mme question si le cours n'a fait que baisser?

7. Comment varie le prix du Call lorsque K augmente et prends des valeurs supérieures S_0 ? Expliquer cette variation;

8. Reprendre le code précédent pour pouvoir calculer cette fois la prime $c(0,0) = PP(1,1)$ d'un Put à la monnaie? Expliquer ce que vous devez changer dans le code.

9. Quelle valeur trouvez-vous pour la prime $c(0,0) = PP(1,1)$ du Put à la monnaie?

10. Comparez avec le prix lorsque σ vaut 0.4. Expliquez la différence.

11. Comment varie le prix du Put lorsque K augmente et prends des valeurs supérieures S_0 ? Expliquer cette variation;

12. On peut démontrer que sous des hypothèses très générales on a la relation suivante dite *relation de parité Call-Put*

$$C_t - P_t = S_t - Ke^{-r(T-t)}.$$

Choisir deux valeurs différentes de K , une égale S_0 et une différente. Calculer la différence $C_0 - P_0$ dans chacun des deux cas (on reprend les valeurs de r et sigma, $\sigma = 0.25$ et $r = 0.1$ de la troisième question).

13. A présent, calculer le second membre $S_0 - Ke^{-r(T)}$ de la relation de parit Call-Put dans les deux cas. Qu'observez-vous? Expliquer.