

Finance mathématique : feuille de réponses du TP 3
Prix d'une option comme espérance conditionnelle du payoff

L'objet de cette séance est de calculer dans un modèle de Cox-Ross-Rubinstein à n étapes le prix d'une option Call de payoff $\varphi(S) = (S - K)^+$ comme l'espérance du payoff actualisé.

Comme précédemment, on modélise les prix par une marche aléatoire S_t définie par $S_0 = S_0$ et $S_{t+\delta t} = S_t U_t$, avec $U_t \in \{\mathbf{up}, \mathbf{down}\}$, en introduisant la notation $S(i, j) = SS(i+1, j+1)$ pour représenter la valeur de l'actif S_t à l'instant $t = i\delta t$ s'il y a eu j up depuis l'instant $t = 0$. On pose :

$$n = 145 \quad T = 1 \quad \delta t = T/n \quad \mathbf{up} = e^{+\frac{\sigma}{\sqrt{n}}} \quad \mathbf{down} = e^{-\frac{\sigma}{\sqrt{n}}} \quad \sigma = 0.25 \quad S_0 = 145 \quad r = 0.15 \quad R = e^{r\delta t}.$$

On veut calculer la prime d'un Call à la monnaie sur l'actif S_t en utilisant la formule $C(0, 0) = \mathbb{E}(\varphi(S(n, J))/R^n)$, où J est une variable aléatoire qui suit une loi binômiale : $\mathbb{P}(\{J = k\}) = \binom{n}{k} p^k (1-p)^{n-k}$, avec $\binom{n}{k} = \frac{n!}{k!(n-k)!}$.

1. Reprendre tout d'abord les codes des TP précédents permettant de calculer la marche S_t , la marche C_t et la marche P_t avec les constantes ci-dessus. Les exécuter puis indiquer quelle prime vous trouvez pour le Call à la monnaie et le Put à la monnaie.

2. Expliquer, en vous aidant de l'aide de Scilab, ce que retourne la commande suivante :
`Phi(SS(1+n, 1+0:1+n))*binomial(p, n)'`

3. En déduire la valeur de la prime du Call à la monnaie et la comparer avec la valeur obtenue ci-dessus. Expliquer.

4. Reprendre les deux dernières questions pour un Put.

1. Le code suivant permet de calculer le prix d'un Call $C(i, j)$ à la monnaie à un instant $t \in \{0, \delta t, 2\delta t, \dots\}$ quelconque (et non plus seulement en $t = 0$).

```
C=zeros(n+1,n+1)
C(1+n,:)=Phi(SS(1+n,:));
for i=0:n-1
    for j=0:i
        C(1+i,1+j)=(Phi(SS(1+n,1+j:1+j+n-i))*binomial(p,n-i)')/R^(n-i)
    end;
end;
```

Expliquez pourquoi puis calculez quelques valeurs de C .

2. Quelle est la valeur du Call à la monnaie après 50 pas de temps lorsque l'actif sous-jacent n'a cessé de baisser? Quelle est sa valeur au même instant s'il n'a baissé que 10 fois?

3. Reprendre le code précédent mais cette fois pour un Put. Vérifier la relation de parité Call-Put à l'instant $t = 0$ et à l'instant $t = \delta t$.