

Feuille-réponses du TD 7
Calcul du prix d'une option barrière

On reprend les notations des TP précédents, avec les constantes suivantes $n = 12$, $T = 1$, $\sigma = 20\%$, $S_0 = 140$ et $r = 0.05$.

Exercice 1. : Créer un nouveau code Scilab en commençant par y recopier la définition de SS et celle de CC utilisée dans les TP précédents. Avant de l'exécuter, modifier les valeurs des constantes.

Combien vaut l'actif sous-jacent après 12 "down" ? Combien après 7 "down" et 5 "up" ? Combien vaut le Call à la monnaie ($K = S_0$) à l'instant $t=0$? Combien vaut-il à l'instant $t = \frac{1}{2}$ si l'actif sous-jacent n'a eu que des "up" ?

Exercice 2. : On rappelle qu'une option DIC est une option Call qui ne prend sa valeur à l'instant final T que si le cours de l'actif sous-jacent est passé en dessous d'une barrière.

Pour calculer la valeur d'une option DIC (on prendra ici la barrière égale à $L = 120$), on va utiliser, comme pour un Call vanille, sa définition

$$DIC_0 = \mathbb{E}(\varphi(S_T)\mathbb{I}_{\tau_L < T})$$

en programmant le calcul de cette espérance par récurrence retrograde. On procède de la façon suivante. Mais pour prendre en compte l'indicatrice $\mathbb{I}_{\tau_L < T}$, on ajoute aux deux variables i et j usuelles une troisième variable notée k qui vaut 0 ou 1 selon qu'on envisage que $\mathbb{I}_{\tau_L < t}$ vaut 0 ou 1. La fonction `sousL(i, j)` est une fonction qui vaut 1 lorsqu'on est sous la barrière et 0 si l'on est au dessus et on l'utilise de la façon suivante. En $t = T$, l'option vaut $\varphi(S_T)$ lorsque $k = 1$ et elle vaut 0 sinon. Donc

$$DIC(n, j, 1) = \varphi(S(n, j)) \quad , \quad DIC(n, j, 0) = 0.$$

Lorsque $t < T$, l'option est égale à l'espérance actualisée de ses deux valeurs suivantes (comme pour un Call vanille) et la troisième variable k est égale à 1 à 0 selon qu'on suppose que la barrière a déjà été franchie ou non. On a donc :

$$DIC(i, j, k) = e^{-rT} (pDIC(i + 1, j + 1, k') + (1 - p)DIC(i + 1, j, k''))$$

où $k' = \max(k, \text{sousL}(i + 1, j + 1))$ et $k'' = \max(k, \text{sousL}(i + 1, j))$.

Saisir le code correspondant (voir ci dessous). Indiquer sur le code lequel des deux terme `max(k, sousL(i+1, .))` qui y figure n'est pas nécessaire et aurait pu être remplacé par `k` et expliquer pourquoi.

4. Reprendre les deux questions précédentes pour des options DIP et DOP.

```
////////Indicatrice de la région sous la barrière////////
function indi=sousL(i,j);
    if SS(i+1,j+1)<=L then indi=1;
    else indi=0;
    end;
endfunction;
////////Calcul des valeurs de la DIC
DDIC=zeros(n+1,n+1,2);
for j=0:n
    for k=0:1
        if k==1 then DDIC(n+1,j+1,k+1)=phi(SS(n+1,j+1));
        else DDIC(n+1,j+1,k+1)=0;
        end;
    end;
end;
for i=n-1:-1:0
    for j=0:i
        for k=0:1
            DDIC(i+1,j+1,k+1)=(p*DDIC(i+1+1, j+1+1, max(k, sousL(i+1,j+1))+1)..
                + (1-p)*DDIC(i+1+1, j+1, max(k, sousL(i+1,j))+1))/R;
        end;
    end;
end; .
```