Université de Nice | L3MASS, année 2012-2013
Département de Mathématiques | Calcul stochastique et Finance

Cours10 : Le modèle de Ho et Lee

1 Le modèle de Ho et Lee pour les zéro-coupons

On veut maintenant introduire l'équivalent, pour les taux d'intérêt, du modèle de Cox-Ross-Rubinstein pour les actions, c'est-à-dire un modèle binomial. Comme il s'agit cette fois d'un modèle de taux, sa particularité est que les valeurs de la marche aléatoire ne sont plus des *nombres* mais des *courbes* représentant la valeur "présente" (à $t = 0$) d'un euro à la date T.

$$T \mapsto Z_t^T = Z(t,T) \ \ , \ \ t \leq T \leq T_{\max} \ \ , \ \ t \in \mathbb{T} := [0..T_{\max}]_{\delta t} \ \ , \ \ \delta t := T_{\max}/n.$$

L'idée de ce modèle est de généraliser au cas stochastique la relation $Z(t,u)Z(u,v) = Z(t,v)$ pour tout $t \leq u \leq v$, appelée *relation de rollover.* Dans le cas de taux d'intérêt déterministes, il est en effet facile de se convaincre que cette relation doit être satisfaite puisque le terme de gauche est précisément égal à la quantité à investir à l'instant t pour avoir en u le montant précis qu'il faut investir à cet instant pour avoir un Euros à l'instant v. Mais ceci est aussi la quantité égale au terme de droite. Lorsqu'on réécrit cette relation sous la forme, $Z(u,v) = \frac{Z(t,v)}{Z(t,u)}$, on remarque que les valeurs de $Z(t,u)$ et $Z(t,v)$ étant connues à l'instant t, la relation permet de prévoir à l'instant t la valeur de $Z(u,v)$ qui, elle, est inconnue à cette date. Pour leur modèle stochastique Ho et Lee ont eu l'idée de transformer cette égalité en une récurrence stochastique

$$Z(u,v) = \frac{Z(t,v)}{Z(t,u)} H_t^{u,v}. \tag{1}$$

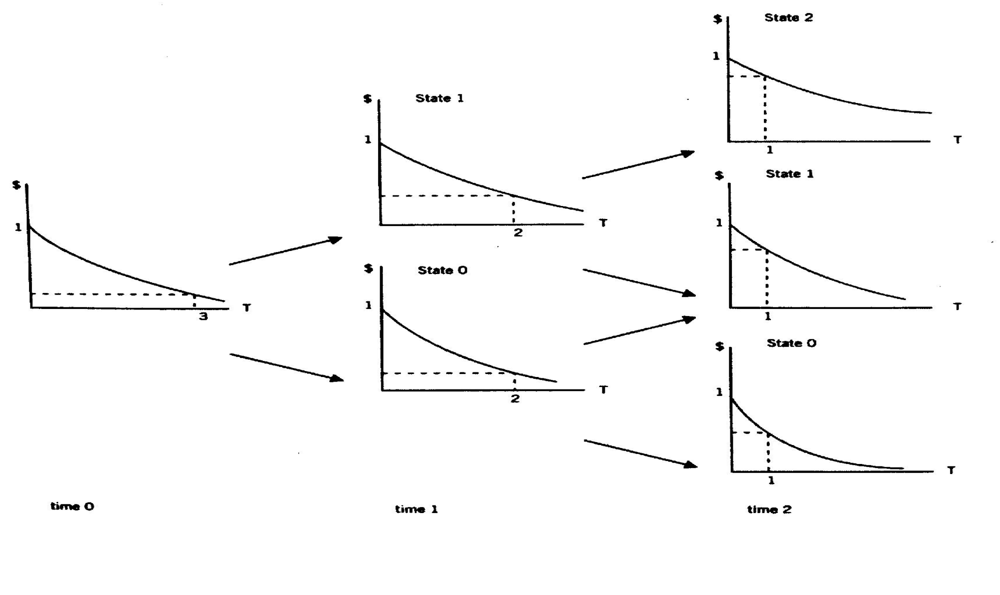
où les $H_t^{u,v}$ sont aléatoires. Plus précisément, on se donne une fonction déterministe $(\theta, x) \mapsto \eta(\theta, x)$ (que l'on présisera plus loin) telle que

$$Z_{t+\delta t}^T = \frac{Z_t^T}{Z_t^{t+\delta t}} \eta^T(\theta(t+\delta t), X_{t+\delta t}), \tag{2}$$

où $\theta^T(t) := T - t$ est le temps qui reste jusqu'à la maturité T. L'idée de ce modèle est illustrée par la figure suivante tirée de l'article original de Ho et Lee.

Comme dans le modèle de Cox-Ross-Rubinstein, $Z_{i\delta t}$ prend $i+1$ valeurs, selon le nombre de "up", $j = J_i(\omega)$, où $J_i = \delta J_1 + \ldots + \delta J_i$, $(\delta J_i)_{i \geq 1}$ étant des v.a. de Bernoulli indépendentes et de loi [1] $\delta J_i \leadsto \mathcal{B}(1, 1-\pi_i)$. On définit la filtration $\mathbb{F} = (\mathcal{F}_t)_{t \in \mathbb{T}}$, par $\mathcal{F}_0 = \{\emptyset, \Omega\}$, et pour $k \geq 1$, $\mathcal{F}_{k\delta t} = \sigma(\delta J_1, \ldots, \delta J_k) =$

1. nous respectons ici la tradition de choisir pour π_i la probabilité que Z_t^T subisse un "down" car ceci correpond à un "up" des taux d'intérets (puisque "quand les taux montent, les obligations baissent"). Attention, dans l'article de M. Leippold et Z. Wiener (`http://papers.ssrn.com/abstract=292225`), il est fait le choix inverse $\mathbb{P}(X_t = 0) = 1 - \pi$.



$\sigma(X_{\delta t},\ldots,X_{k\delta t})$, avec $X_{i\delta t}=\delta J_i$. Les fonctions aléatoires $Z_t : [t..T_{\max}] \to \mathbb{R}^+$, $T \mapsto Z_t^T$, sont choisies $\mathcal{F}_t$-measurables, et même $\sigma(J_i)$-measurables pour $t = i\delta t$.

Nous allons montrer à présent que pour ce modèle la fonction η doit nécessairement prendre une forme particulière assez simple et donc que ce modèle ne dépend en fait que de 3 paramètres.

1.1 Un model à trois paramètres : π, δ, et n

1.1.1 Condition d'absence d'opportunité d'arbitrage

La première contrainte concerne l'absence d'opportunité d'arbitrage : pour tout $T \in \mathbb{T}$, la valeur actualisée de Z_t^T doit être une martingale. Pour cela on doit avoir pour tout $t \in [0..T-\delta t]$

$$Z_t^T = \mathbb{E}^*(\frac{1}{R_t} Z_{t+\delta t}^T \mid \mathcal{F}_t) \text{ où } \tfrac{1}{R_t} Z_t^{t+\delta t}.$$

En utilisant (2), il vient

$$\begin{aligned} Z_t^T &= \mathbb{E}^*(Z_t^{t+\delta t} Z_{t+\delta t}^T \mid \mathcal{F}_t) = \mathbb{E}^*(Z_t^T \eta(\theta^T(t+\delta t), X_{t+\delta t}) \mid \mathcal{F}_t) \\ &= Z_t^T \mathbb{E}^*(\eta(\theta^T(t+\delta t), X_{t+\delta t}) \mid \mathcal{F}_t) = Z_t^T \mathbb{E}^*(\eta(\theta^T(t+\delta t), X_{t+\delta t})), \end{aligned}$$

puisque $X_{t+\delta t}$ est indépendent of $\mathcal{F}_t$. Donc, en divisant par Z_t^T on obtient, puisque $\pi_i = \mathbb{P}[X_i = 0]$,

$$1 = \pi_i \eta(\theta, 0) + (1-\pi_i)\eta(\theta, 1) \tag{3}$$

pour tout $\theta = \theta^T(t+\delta t) \in [0..T_{\max} - \delta t]_{\delta t}$. Il en résulte que $\pi_i = (1-\eta(\theta,1))/(\eta(\theta,0)-\eta(\theta,1))$ ne peut changer avec i et doit être constant (égal à π). De plus, en utilisant (2) pour $t := T - \delta t$, on a aussi $\theta_{t+\delta t}^T = \theta_T^T = 0$, et

$$1 = Z_T^T = Z_{t+\delta t}^T = \frac{Z_t^T}{Z_t^{t+\delta t}} \eta(\theta^T(t+\delta t), X_{t+\delta t}) = \frac{Z_{T-\delta t}^T}{Z_{T-\delta t}^{T-\delta t+\delta t}} \eta(\theta^T(T), X_T),$$

pour $X_T \in \{0,1\}$. Donc $\eta(0,x) = 1$ pour tout $x \in \{0,1\}$. D'où la proposition suivante :

Proposition 1 *Tout model de taux d'intérêt satisfaisant (2), avec les $X_{t_i} \rightsquigarrow \mathcal{B}(1, 1-\pi_i)$ independents, est sans arbitrage si et seulement si $\eta(0,x) = 1$ pour tout $x \in \{0,1\}$, et si les π_i sont égaux et que leur valeur commune π satisfait la relation*

$$1 = \pi \eta(\theta, 0) + (1-\pi)\eta(\theta, 1). \tag{4}$$

1.1.2 Condition binomiale

A présent, en utilisant le fait que pour $t = i\delta t$, Z_t^T ne dépend que de J_i, on a le résultat suivant qui fixe la forme de la fonction η :

Proposition 2 *Sous la condition de non arbitrage, pour tout $\theta \in [0..T-\delta t]_{\delta t}$, on a :*

$$\eta(\theta+\delta t, 1)\eta(\theta, 0)\eta(\delta t, 0) = \eta(\theta+\delta t, 0)\eta(\theta, 1)\eta(\delta t, 1), \tag{5}$$

et donc

$$\eta(\theta, 0) = \frac{1}{\pi + (1-\pi)\delta^{\frac{\theta}{\delta t}}} \ , \ \eta(\theta, 1) = \delta^{\frac{\theta}{\delta t}} \eta(\theta, 0) \ , \ \textit{avec } \delta := \frac{\eta(\delta t, 1)}{\eta(\delta t, 0)} > 1. \tag{6}$$

Preuve : Cette formule est une conséquence du fait que le modèle doit être binomial, c'est-à-dire que, pour $t = i\delta t$, Z_t^T ne doit dépendre que de $j = J_i(\omega)$ et non des valeurs particulières de $\delta J_1(\omega)$, ..., $\delta J_i(w)$ dont la somme vaut $J_i(\omega)$. Ceci n'est vrai que si l'arbre est *recombinant*, c'est-à-dire si un *up* suivi d'un *down* donne le même résultat qu'un *down* suivi d'un *up*. En d'autres termes, pour $\omega' \in \Omega$ et $\omega'' \in \Omega$ tels que $J_i(\omega') = J_i(\omega'') = j$ et $J_{i+2}(\omega') = J_{i+2}(\omega'') = j+1$, mais $\delta J_{i+1}(\omega') = 1$ et $\delta J_{i+2}(\omega') = 0$ tandis que $\delta J_{i+1}(\omega'') = 0$ et $\delta J_{i+2}(\omega'') = 1$, les valeurs de $Z_{i\delta t}^T$ et de $Z_{(i+2)\delta t}^T$ ne doivent pas dépendre du fait que $\omega = \omega'$ ou $\omega = \omega''$.

Posons $\theta = \theta_{t+2\delta t}^T$ et appliquons deux fois (2) :

$$\begin{aligned} Z_{t+2\delta t}^T &= \frac{Z_{t+\delta t}^T}{Z_{t+\delta t}^{t+2\delta t}} \eta(\theta, X_{t+2\delta t}) = \frac{Z_t^T}{Z_t^{t+\delta t} Z_{t+\delta t}^{t+2\delta t}} \eta(\theta, X_{t+\delta t}) \eta(\theta, X_{t+2\delta t}) \\ &= \frac{Z_t^T}{Z_t^{t+2\delta t} \eta(\delta t, X_{t+\delta t})} \eta(\theta, X_{t+\delta t}) \eta(\theta, X_{t+2\delta t}) \text{ , à nouveau par (2)} \end{aligned}$$

Donc comme $J_i(\omega') = J_i(\omega'')$ et $J_{i+2}(\omega') = J_{i+2}(\omega'')$, et comme $Z^T_{t+2\delta t}$, Z^T_t, et $Z^{t+2\delta t}_t$ ne dépendent pas du fait que $\omega = \omega'$ ou que $\omega = \omega''$, il en sera de même de

$$\frac{\eta(\theta + \delta t, X_{t+\delta t})\eta(\theta, X_{t+2\delta t})}{\eta(\delta t, X_{t+\delta t})}.$$

L'égalité des deux valeurs obtenues selon que $\omega = \omega'$ ou $\omega = \omega''$, donne

$$\frac{\eta(\theta + \delta t, 1)\eta(\theta, 0)}{\eta(\delta t, 1)} = \frac{\eta(\theta + \delta t, 0)\eta(\theta, 1)}{\eta(\delta t, 0)}.$$

A présent, comme d'après (4) on a $\eta(\theta, 1) = \frac{1}{1-\pi}(1 - \pi\eta(\theta, 0))$, donc (2) devient

$$\frac{1}{1-\pi}(1 - \pi\eta(\theta + \delta t, 0)\eta(\theta, 0)\eta(\delta t, 0) = \frac{1}{(1-\pi)^2}\eta(\theta + \delta t, 0)(1 - \pi\eta(\theta, 0))(1 - \pi\eta(\delta t, 0)). \tag{7}$$

Posons $x_n = \frac{1}{\eta(\theta,0)}$, $x_{n+1} = \frac{1}{\eta(\theta+\delta t,0)}$, et donc $x_1 = \frac{1}{\eta(\delta t,0)}$, l'égalité (7) devient

$$(1-\pi)\left(1 - \frac{\pi}{x_{n+1}}\right)\frac{1}{x_n}\frac{1}{x_1} = \frac{1}{x_{n+1}}\left(1 - \frac{\pi}{x_n}\right)\left(1 - \frac{\pi}{x_1}\right).$$

Soit, en multipliant les deux termes par $x_1 x_n x_{n+1}$, on obtient $(1-\pi)(x_{n+1}-\pi) = (x_n - \pi)(x_1 - \pi)$, ou, de manière équivalente, $x_{n+1} = \pi + \frac{1}{1-\pi}(x_n - \pi)(x_1 - \pi) =: x_n\delta + \gamma$, avec $\delta = \frac{x_1-\pi}{1-\pi}$ et $\gamma = \pi - \frac{\pi}{1-\pi}(x_1 - \pi) = \pi(1-\delta)$. Comme $x_1 = \frac{1}{\eta(\delta t,0)}$, on obtient $\eta(\delta t, 0) = \frac{1}{\pi+(1-\pi)\delta}$. Et comme $1 = \pi\eta(\delta t, 0) + (1-\pi)\eta(\delta t, 1)$,

$$\delta = \frac{1}{1-\pi}\left(\frac{1}{\eta(\delta t, 0)} - \pi\right) = \frac{1}{1-\pi}\frac{1 - \pi\eta(\delta t, 0)}{\eta(\delta t, 0)} = \frac{\eta(\delta t, 1)}{\eta(\delta t, 0)}.$$

Finalement, en résolvant $x_n = x_{n-1}\delta + \pi(1-\delta)$ il vient $x_n = (1-\pi)\delta^n + \pi$, d'où

$$\eta(\theta, 0) = \eta(n\delta t, 0) = \frac{1}{x_n} = \frac{1}{\pi + (1-\pi)\delta^n} = \frac{1}{\pi + (1-\pi)\delta^{\frac{\theta}{\delta t}}},$$

et

$$\eta(\theta, 1) = \frac{1}{1-\pi} - \frac{\pi}{\pi + (1-\pi)\delta^{\frac{\theta}{\delta t}}} = \frac{\delta^{\frac{\theta}{\delta t}}}{\pi - (1-\pi)\delta^{\frac{\theta}{\delta t}}} = \delta^{\frac{\theta}{\delta t}}\eta(\theta, 0).$$

□

2 Exemples de produits derivés de taux

Lorsqu'on souscrit un prêt à taux variable on peut souhaiter souscrire un contrat qui prendra en charge le paiement des intérêts dûs, au-delà d'un taux maximal K. Typiquement, si l'intérêt r_T est payable à la date T pour l'emprunt d'un euro à la date $T - \delta t$, ce contrat payera $(r_T - K)^+$. Ce contrat s'appelle un *caplet à* l'échéance T au plafond K. Il donne une assurance contre une envolée du taux (taux plafond) à l'instant T. Pour le prêt d'un Euro remboursable à la date $T_{\max}$ et à intérêts payables à intervalle $\delta t =$ un an, il convient de souscrire un *Cap*, qui est la somme de tous les caplets d'échéance $T \in]0..T_{\max}]_{\delta t}$. Comme le modèle de Ho et Lee est un modèle binaire, un produit dérivé de taux tel qu'un caplet se couvre, à la date $t - \delta t$, par un portefeuille comportant à la fois un placement (non risqué) en $Z^t_{t-\delta t}$ et en placement (risqué) en $Z^{t+\delta t}_{t-\delta t}$. Ceci se calcule de manière similaire au cas des options pour un modèle binaire d'action et, comme les processus $(\tilde{Z}^T_t)_{t\in[0..T]}$ sont, pour tout $T \in \mathbb{T}$, des $(\mathbb{F}, \mathbb{P}^*)$-martingales, on retrouve pour la valeur du portefeuille de couverture

$$\text{Caplet}^T_{t-\delta t} = \mathbb{E}^*(\text{Caplet}^T_t \mid \mathcal{F}_{t-\delta t})/(1 + r_t) \tag{8}$$

(et plus généralement, pour tous $s \le t$, $\text{Caplet}^T_s = \mathbb{E}^*\left(\text{Caplet}^T_t \frac{B_s}{B_t} \mid \mathcal{F}_s\right)$).

A coté des Caps composés de caplets, il existe de même des Floors composés de floorlets, qui protègent d'une chûte du taux (taux plancher), dont le prix se calcule de manière analogue puisqu'il s'agit alors d'un Put (ou d'une famille de Puts). Enfin il existe également un grand nombre d'autres contrats dérivés de taux, comme les Collars (achat d'un Cap et vente simultanée d'un Floor de même caractéristiques), Swaps (échange d'un taux variable contre un taux fixe), Swaptions (option sur Swap) ou FRA (Forward Rate Agreement)...

Remarque : Le modèle de Ho et Lee étudié ici est un modèle discret. Les versions continues correspondantes appartiennent à la famille des modèles HJM (pour Heath, Jarrow et Morton) et sont des modèle du taux forward instantané $f(t,T)$ et non du zéro-coupons $Z(t,T)$. Il existe aussi plusieurs modèles continus pour le taux court r_t (dont un du à Ho et Lee, à ne pas confondre...) mais ces modèles ne permettent pas de représenter l'ensemble de la dynamique de la structure par terme.

Remarque : Notons pour finir que le modèle de Ho et Lee, comme c'est le cas généralement des modèles dit *modèles de taux*, ne prend en compte que le risque dit *rique de taux* correspondant aux variations du taux dues à l'inflation et autres aléa économiques mais pas le risque dit *risque de crédit* ou *de défaut* qui correspond au niveau plus ou moins bon de confiance du détenteur de l'obligation ou du prêt dans la qualité de l'emprunteur quand à un possible défaut (de remboursement). C'est la raison pour laquelle une obligation d'état (en Europe) est généralement moins chère qu'une obligation souscrite auprès d'une entreprise de même caractéristiques. Le risque de crédit est habituellement séparé dans la modélisation du risque de taux et il existe des produits spécifiques dit *produits dérivés de crédit* qui servent à couvrir ce second risque. Le modèle de Ho et Lee ne prend pas du tout en compte le risque de crédit.

Exercice : Caplets et Caps : Lorsqu'on souscrit un prêt à taux variable on peut souhaiter souscrire un contrat qui prendra en charge le paiement des intérêts dûs, au-delà d'un taux maximal K. Typiquement, si l'intérêt r_T payable à la date T pour l'emprunt d'un euro à la date $T-\delta t$, ce contrat payera $(r_T-K)^+$. Ce contrat s'appelle un *caplet à* l'échéance T au plafond K. Pour le prêt d'un euro remboursable à la date $T_{\max}$ et à intérêts payable à intervalle $\delta t=$ un an, il convient de souscrire un *Cap*, qui est la somme de tous les caplets d'échéance $T\in]0..T_{\max}]_{\delta t}$. Comme le modèle de Ho et Lee est un modèle binaire, un produit dérivé de taux tel qu'un caplet se couvre, à la date $t-\delta t$, par un portefeuille comportant à la fois un placement (non risqué) en $Z^t_{t-\delta t}$ et en placement (risqué) en $Z^{t+\delta t}_{t-\delta t}$. Ceci se calcule de manière similaire au cas des options pour un modèle binaire d'action et, comme les processus $(\tilde Z^T_t)_{t\in[0..T]}$ sont, pour tout $T\in\mathbb{T}$, des $(\mathbb{F},\mathbb{P}^*)$-martingales, on retrouve pour la valeur du portefeuille de couverture

$$\mathrm{Caplet}^T_{t-\delta t}=\mathbb{E}^*(\mathrm{Caplet}^T_t\mid\mathcal{F}_{t-\delta t})/(1+r_t) \tag{9}$$

(et plus généralement, pour tous $s\le t$, $\mathrm{Caplet}^T_s=\mathbb{E}^*\left(\mathrm{Caplet}^T_t\frac{B_s}{B_t}\mid\mathcal{F}_s\right)$). De manière similaire au cas des zéro-coupons et taux actuariels, notons $\mathrm{Caplet}^T_t(\omega)$=`Caplet(n,j,k)`, toujours avec $t=\mathtt{n}\delta t$, $J_t(\omega)=$`j`, et $T=\mathtt{k}\delta t$.

`n=k)` Comment définir `Caplet(k,j,k)` ?

`n=k-1)` Comme $1/(1+r_t)=Z^t_{t-\delta t}$, montrer que `Caplet(k-1,j,k)=Caplet(k,j,k)*Z(k-1,j,k)`.

`n<k-1)` Exprimer `Caplet(n,j,k)` en fonction de `Caplet(n+1,j,k)` et `Caplet(n+1,j+1,k)` lorsque `n<k-1`, en utilisant (9).

`func)` Définir une hypermatrice `CCaplet(n,j,k)` et une fonction `Caplet(n,j,k)` donnant la valeur de $\mathrm{Caplet}^{k\delta t}_{n\delta t}(\omega)$ lorsque $J_{n\delta t}(\omega)$=`j`.

Application : Dans le modèle de Ho et Lee considéré (où $r_{\delta t}$=2,5%), quel est le prix d'un contrat de plafonnement à K =4,5% des intérêts payés annuellement sur un emprunt de 1.000.000 euros sur 15 ans. Idem pour un plafonnement à 3,5%