Epreuve d'examen, deuxième session (durée 2h00)
LSV1 : Mathématiques Appliquées à la Biologie

Les cinq exercices peuvent être traités indépendamment et valent respectivement 6 points, 5 points, 5 points, 2 points et 2 points(barème indicatif). On soignera les explications. Les réponses doivent être données sur cette feuille qui sera ensuite glissée en fin d'épreuve dans la copie cachetée (ne rien écrire sur la copie elle-même). Merci de choisir un identifiant (succession de quelques chiffres ou lettres) que vous ferez figurer à la fois ci-dessus et à la fois en haut de la copie cachetée portant votre nom.

Exercice 1 : On étudie l'évolution au cours du temps des formations végétales sur un vaste territoire en les décomposant pour simplifier en trois catégories, *lande*, *maquis* et *forêt*. On modélise cette dynamique par une chaine de Markov X_t d'espace d'états $S = \{l, m, f\}$ et de matrice de transition :

$$\mathbb{P} = \begin{pmatrix} 0,4 & 0,6 & 0 \\ 0 & 0,2 & 0,8 \\ 0,35 & 0 & 0,65 \end{pmatrix}$$

1. Tracer le diagramme en points et flèches associé.

2. Quelle est, selon ce modèle, la probabilité que la population passe de l'état *maquis à* l'état *forêt ?*

   $P(X_{t+1} = f/X_t = m) =$

3. Calculer la probabilité d'une trajectoire du type $X_0 = f, X_1 = f, X_2 = l, X_3 = m$ en fonction de $\pi_0(f)$.

4. Donner un exemple de trajectoire de probabilité nulle.

5. Quelle est, selon ce modèle, la probabilité que la population passe de l à m en deux étapes ?

   $P(X_{t+2} = m/X_t = l) =$

6. Connaissant la répartition initiale $\pi_0 = (0,3 \;\; 0,4 \;\; 0,3)$, calculer la répartition à l'étape suivante π_1. Des trois formations végétales, lesquelles progressent, lesquelles regressent ?

Exercice 2 : On étudie l'effectif P_t d'une population d'insectes en fonction du temps t mesuré en jours.

1. On suppose tout d'abord que les variations de cette population sont proportionnelles à son effectif. Comment appelle-t-on cette dynamique ?

2. S'il y a 15 insectes le deuxième jour et 60 le quatrième, quel était l'effectif à l'instant initial ?

3. On suppose à présent que cette population suit un modèle logistique $\Delta P_t = rP_t - sP_t^2$ avec $P_0 = 10$, $r = 0,5$ et $s = 10^{-2}$. Calculer les premiers points de sa trajectoire et décrire sa dynamique dans ce cas.

4. Tracer une représentation en cobweb de la trajectoire correspondant à $P_0 = 10$.

5. Comment varierait, selon ce modèle, la population d'oiseaux dans le cas $P_0 = 50$? Même question pour le cas $P_0 = 100$.

Exercice 3 : On considère une population d'oiseaux dont le cycle de reproduction comporte 3 étapes, *oeufs*, *oisillons* (juveniles) et *oiseau* (adultes). Si l'on désigne respectivement par o_t, j_t et a_t les effectifs à l'instant t de ces trois classes,

$$\left\{\begin{array}{rcl} o_{t+1} & = & 6j_t + 10a_t \\ j_{t+1} & = & 0,5o_t \\ a_{t+1} & = & 0,4j_t \end{array}\right. \qquad (1)$$

1. Ecrire ce système sous forme matricielle et indiquer le sens des 4 coefficients 6, 10, 0,5 et 0,4.

2. Les formules (1) permettent, à partir des effectifs initiaux des trois classes, (o_0, j_0, a_0), de calculer les effectifs (o_1, j_1, a_1) à l'instant suivant $t = 1$, puis, (o_2, j_2, a_2) à l'instant $t = 2$ et ainsi de suite. Si $(o_0, j_0, a_0) = (30, 50, 50)$, on obtient :

t	0	1	2	3	4	5	6
o_t	30	...	290	2460	2470	7960	12330
j_t	50	15	400	...	1230	1235	3980
a_t	50	20	...	160	58	492	494

Compléter les valeurs manquantes du tableau puis expliquer vos calculs.

3. Si l'on désigne par $N_t = o_t + j_t + a_t$ l'effectif total de la population à l'instant t (et donc N_0 l'effectif initial), on peut également calculer à partir de (**??**) les termes successifs de la suite (N_t), ce qui permet d'apréhender aussi la dynamique de cette population dans son ensemble. On a ici :

t	0	1	2	3	4	5	6
N_t	130	...	696	2765	3758	....	16804

Calculer les coefficients manquant de ce tableau puis expliquer expliquer vos calculs.

4. Pour avoir une idée du taux de croissance de chacune des classes, on peut calculer les quotients $\frac{o_{t+1}}{o_t}$, $\frac{j_{t+1}}{j_t}$ et $\frac{a_{t+1}}{a_t}$ pour $t = 0, 1, 2, ...$ mais le résultat est très irrégulier et on voit mal sur ces premiers termes quel taux de croissance on pourrait retenir pour rendre compte de la dynamique de ces différentes classes d'age. Et si l'on considère la population dans son ensemble, les quotients $\frac{N_{t+1}}{N_t}$ ne sont pas plus réguliers.

t	0	1	2	3	...	31	32	33	34	35
$\frac{j_{t+1}}{j_t}$	$26,66$	$0,3625$	$8,4827$	$1,004$	...	$2,000$	2	2	2	2
$\frac{a_{t+1}}{a_t}$	$0,3$	$26,66$	$0,3625$	$8,4827$	...	$1,999$	$2,000$	2	2	2
$\frac{p_{t+1}}{p_t}$	$0,4$	$0,3$	$26,66$	$0,3625$	...	$2,000$	$1,999$	$2,000$	2	2

On constate que ces taux tendent tous vers la même valeur λ, ici $\lambda = 2$. On appelle ce coefficient λ le *taux de croissance asymptotique*. Expliquer pourquoi.

5. Expliquer comment l'on peut calculer cette valeur λ.

Exercice 4 : Lorsque l'on calcule la droite de régression par la méthode des moindres carrés ordinaire, on calcule aussi le *coefficients de corrélation linéaire*. De quoi s'agit-il et pourquoi le calcule-t-on ?

Exercice 5 : Qu'est-ce qu'une *classification hierachique ascendante ?* A quoi cela sert-il et comment peut-on l'obtenir ?