Chapitre 2

Chaines de Markov : compléments

Dans cette leçon, nous examinons quelles sont les principales propriétés des chaînes de Markov et nous étudions quelques exemples suplémentaires.

2.1 Propriétés de Markov

Lorsqu'un système est modélisé par une équation différentielle son avenir est uniquement déterminé par sa situation présente, d'où son nom de *dynamique déterministe*. Pour une chaîne de Markov au contraire, on fait l'hypothèse qu'il y a plusieures évolutions possibles à partir de la situation présente, chacune d'elles ayant une certaine probabilité de se réaliser. C'est cette incertitude sur l'avenir qui est prise en compte par les modèles markoviens que l'on appelle pour cette raison *dynamiques aléatoires* ou *stochastiques*. Il existe bien d'autres dynamiques aléatoires que les chaînes de Markov mais celles-ci ont une propriété bien spéciale, que l'on appelle *absence de mémoire* (ou simplement *propriété de Markov*) que nous allons indiquer à présent. Losqu'un système a plusieurs avenirs possibles à partir de son état présent, il se pourrait que la probabilité que l'un ou l'autre de ces avenirs se réalise dépende non seulement de son état présent mais aussi de son histoire récente : dans ce cas, il faudrait par exemple prendre en compte le fait que la probabilité $p_{ij} = P(X_{t+1} = x_j/X_t = x_i)$ pourrait être différente selon que $X_{t-1} = x_k$ ou que $X_{t-1} = x_l$. Il n'y aurait plus moyen alors de définir de matrice de transition. En réalité, lorsqu'on adopte une modélisation par une chaîne de Markov, on suppose de fait que la dynamique aléatoire considérée possède la propriété suivante, appelée *propriété de Markov* :

$$P(X_{t+1} = x_j/X_t = x_i, X_{t-1} = x_k, X_{t-2} = x_l, \ldots) = P(X_{t+1} = x_j/X_t = x_i).$$

2.2 Chaines de Markov irréductibles

Une chaîne de Markov est dite *irréductible* lorsque tous ses états communiquent, c'est-à-dire lorsque, pour toute paire d'états (x_i, x_j) la probabilité d'aller de l'un à l'autre est strictement positive. Cette propriété peut se lire généralement sur le diagramme en points et flèches. En effet, on s'assure que la chaîne est irréductible en vérifiant que chaque paire de points est reliée soit par une flèche unique soit par une succession de flèches. Ainsi, l'exemple de la chaîne $\{h, a, f\}$ de la leçon précédente est une chaîne de Markov irréductible de même que celui des souris dans le labyrinthe $\{1, 2, 3, 4, 5\}$. Mais, si l'on modifie cet exemple en considérant que lorsque la souris a atteint le compartiment 5 (qui contient le fromage) elle y reste avec probabilité 1, alors cette chaîne n'est plus une chaîne irréductible car il n'y a pas de flèche allant de l'état 5 vers l'un quelconque des autres états. Un état de ce type, dans lequel on reste à coup sur lorsqu'on y parvient s'appelle un *état absorbant*. Une chaîne présentant un état absorbant ne peut pas être irréductible.

2.3 Etats récurrents/transitoires

Un état $x_i \in S$ tel que, lorsque la chaîne est issue de ce point, elle y retourne en un temps fini avec une probabilité strictement positive, s'appelle un état *récurrent* (sinon l'état est dit *transitoire*). Lorsqu'un état est récurrent, chaque trajectoire issue de ce point y revient presque certainement une infinité de fois. Par contre, lorsqu'il est transitoire, chaque trajectoire issue de ce point n'y revient presque surement qu'un nombre fini de fois.

Cette distinction entre états récurrents et transitoires est nettement plus délicate à déduire du diagramme en points et flèches. Notons simplement que lorsque la chaîne de Markov est irréductible (et qu'elle a un nombre fini d'états), ses états sont tous récurrents. On parle alors de chaîne récurrente. Un cas particulier intéressant de chaîne récurrente est celui d'une chaîne *périodique*. C'est le cas d'une chaîne ayant une matrice de transition dont l'une des puissances $\mathbb{P}^k$, $k = 2, 3, \ldots$, vérifie $\mathbb{P}^k = \mathbb{P}$. Par exemple on pourra vérifier que si

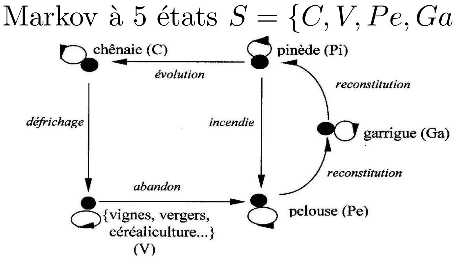
$$\mathbb{P} = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

alors on a $\mathbb{P}^4 = \mathbb{P}$; cette chaîne est dite *périodique de période* 3 car toute trajectoire revient à son état initial après 3 étapes.

Une chaîne dont tous les états sont récurrents admet pour loi stationnaire la loi définie par $\pi(x_i) := \frac{1}{m(x_i)}$, où $m(x_i)$ est l'espérance du temps de retour à l'état x_i (si l'on est parti de x_i). Par exemple, la chaîne périodique précédente admet la distribution $(\frac{1}{3}, \frac{1}{3}, \frac{1}{3})$ comme distribution stationnaire. Dans le cas non périodique, on peut montrer que, moyennant quelques hypothèses suplémentaires, une chaîne de Markov dont tous les états sont récurrents tend vers sa loi stationnaire quelque soit sa loi initiale.

2.4 Exemple de dynamique évoluant vers une loi stationnaire

A titre d'exemple[1] examinons la dynamique suivante qui modélise l'évolution des écosystèmes mediterranéens. A l'origine la forêt méditerranéenne, sur roche calcaire à faible altitude, était très certainement dominée par des chênes (chênes pubescents). Mais l'action de l'homme a éradiqué ces forêts primitives pour leur substituer parcours pastoraux, vergers, ... Puis l'abandon de toute activité agricole au lieu de conduire à restauration naturelle de ces chênaies a bien souvent favorisé l'implantation d'une autre espèce, le pin d'Alep, après passage par un état de guarrigue. Or ces forets de substitution, hautement inflammables, subissent de manière récurrente le passage du feu (incendies volontaires ou non) et sont donc condamnées à une perpétuelle reconstitution. Voici le diagramme en points et flèches correspondant et la matrice de passage de cette chaîne de Markov à 5 états $S = \{C, V, Pe, Ga, Pi\}$



$$\mathbb{P} = \begin{pmatrix} 0,8 & 0,2 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0,7 & 0,3 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0,4 & 0,6 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0,2 & 0,8 \\ 0,1 & 0 & 0,25 & 0 & 0,65 \end{pmatrix}$$

On se convainc facilement que cette dynamique n'a pas d'état absorbant, qu'elle n'est pas périodique. A priori, les trajectoires semblent passer indéfiniment d'un état à un autre et il n'est donc pas evident d'apréhender son évolution. Mais si l'on observe les puissances successives de

[1] Exemple tiré du livre *Modélisation et simulation d'écosystèmes*, P. Coquillard et D. Hill, Masson 1997.

la matrice de transition $\mathbb{P}$, on peut voir qu'après un grand nombre d'itérations, $\mathbb{P}^n$ tend vers une matrice limite dont toutes les lignes sont égales, ce qui signifie que la distribution (proportion de chacun des états) évolue vers une distribution unique qui est une distribution stationnaire. Ainsi on a

$$\mathbb{P}^{40} = \begin{pmatrix} 0,17520 & 0,11680 & 0,20437 & 0,15327 & 0,35034 \\ 0,17517 & 0,11680 & 0,20438 & 0,15328 & 0,35035 \\ 0,17551 & 0,11678 & 0,20438 & 0,15328 & 0,35037 \\ 0,17517 & 0,11678 & 0,20438 & 0,15328 & 0,35037 \\ 0,17518 & 0,11678 & 0,20437 & 0,15328 & 0,36036 \end{pmatrix}$$

2.5 Remarques

Pour finir notons que si les chaînes de Markov fournissent des modèles très utiles, elles présentent aussi des défauts. Parmi eux, l'hypothèse simplificatrice d'un nombre fini d'états possibles ou celle de l'invariance dans le temps des probabilités de transitions sont relativement faciles à contourner car il existe des chaînes de Markov ayant un nombre infini d'états ou/et qui ne sont pas homogènes, c'est-à-dire avec des matrices de transition modifiables au cours du temps. Bien entendu l'étude de ces modèles généralisés nécessitent le recours à des outils mathématiques plus élaborés.

Par contre, il en est différemment pour l'invariance spatiale. Pour le calcul des probabilités de transition, on fait en effet implicitement une hypothèse d'homogénéité spatiale qui est rarement satisfaite dans la pratique. Par exemple un site végétal n'a certainement pas la même probabilité d'être occupé la période suivante par une espèce donnée selon que les sites voisins le sont déjà ou qu'ils ne le sont pas. Et, malheureusement ceci ne peut pas être pris en compte par les modèles markoviens simples que nous avons présentés ici. On retiendra donc qu'il convient d'utiliser avec prudence une chaîne de Markov lorsque ce caractère d'isotropicité du milieu n'est pas du tout satisfait.

2.6 Exercices

Exercice 1 : L'observation du développement d'un organisme (animal ou plante) au cours du temps fait apparaître l'ensemble des états suivants : juvenile, maturité sexuelle, sénescence et décès, que nous noterons respectivement j, m, s et d, avec des probabilités de passage d'un état vers un autre données par la matrice suivante :

$$\mathbb{P} = \begin{pmatrix} 0,2 & 0,2 & 0 & 0,6 \\ 0 & 0,55 & 0,15 & 0,3 \\ 0 & 0 & 0,1 & 0,9 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

1. Tracer le diagramme en points et flèche. La chaîne est-elle irréductible ?
2. Calculer la probabilité de passer en deux étapes de l'état de maturité sexuelle à l'état de sénescence. Calculer la matrice $\mathbb{P}^2$ et vérifier la probabilité calculée précédemment. La chaîne est-elle périodique ?
3. Pour chaque état, indiquer s'il est absorbant, transitoire, récurrent.

Réponses : 1. Un examen du schéma en points et flèches montre que la chaîne n'est pas irréductible : en effet, on ne peux pas passer de l'état de maturité sexuelle à l'état juvenile. De plus l'état décès est absorbant.

2. Sur le schéma en points et flèches, on voit facilement que, partant de l'état m, on atteint l'état s en deux étapes de deux façons exactement : soit on reste en m pendant la première étape puis on va en s durant la seconde, soit on y va durant la première

et on reste en s durant la seconde. Il n'y a pas d'autres possibilités. Cela conduit au calcul suivant :

$$\begin{aligned} P(X_2 = s/X_0 = m) &= P(X_2 = s/X_1 = m) \cdot P(X_1 = m/X_0 = m) \\ &+ P(X_2 = s/X_1 = s) \cdot P(X_1 = s/X_0 = m) \\ &= 0,15 \cdot 0,0,55 + 0,15 \cdot 0,1 = 0,0975. \end{aligned}$$

La probabilité cherchée se lit aussi sur la matrice $\mathbb{P}^2$, c'est le coefficient de la deuxième ligne et de la troisième colonne, ce qui confirme le résultat trouvé :

$$\mathbb{P}^2 = \begin{pmatrix} 0,04 & 0,15 & 0,03 & 0,78 \\ 0 & 0,3025 & 0,0975 & 0,6 \\ 0 & 0 & 0,01 & 0,99 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

La chaîne n'est pas périodique comme on peut le voir facilement sur son diagramme en points et flèches. Par exemple, on voit qu'une trajectoire qui passe de l'état j à l'état m ne repassera plus jamais par l'état j et ne peut donc pas être périodique.

3. Les trois états j, m et s sont transitoires car la probabilité de ne pas revenir en j sachant qu'on y était à l'état initial est supérieure à $0,8$ et de même cette probabilité est supérieure à $0,45$ pour m et à $0,9$ pour s. L'état d est absorbant donc récurrent.

Exercice 2 : On considère une chaîne de Markov à quatre états $S = \{1,2,3,4\}$ dont la matrice de transition est

$$\mathbb{P} = \begin{pmatrix} 0 & \frac{1}{2} & \frac{1}{2} & 0 \\ \frac{1}{2} & 0 & 0 & \frac{1}{2} \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

1. Tracer le graphe en points et flèches associé à cette chaîne de Markov.
2. Montrer que les états 3 et 4 sont *absorbants*. Les autres sont-ils transitoires ou récurents ?
3. Calculer les probabilités des trajectoires suivantes en fonction des probabilités initiales de chaque état (p_0, q_0, r_0, s_0) :
   $(X_0 = 1 \ , \ \forall n \geq 1 \ \ X_n = 3)$, $(X_0 = 1 \ , \ \ X_1 = 2 \ , \ \ \forall n \geq 2 \ \ X_n = 4)$,
   $(X_n = 1$ si n est pair et $X_n = 2$ si n est impair$)$.
4. Montrer que la trajectoire $(X_n = 1$ si n est pair et $X_n = 2$ si n est impair$)$ est de probabilité nulle.
5. On suppose que la répartition entre les quatre états est uniforme à l'instant initial $t = 0$. Calculer la répartition à l'instant $t = 1$ puis à l'instant $t = 2$. Même question si l'on part d'une distribution initiale $\pi_0 = (\frac{1}{2}, \frac{1}{2}, 0, 0)$.
6. Montrer que toute distribution initiale de la forme $\pi_0 = (0, 0, r_0, s_0)$ avec $r_0 + s_0 = 1$ est une distribution stationnaire. En existe-t-il d'autres ?

Réponses : 1. Question laissée au lecteur

2. Les états 3 et 4 sont absorbants puisque $p_{33} = p_{44} = 1$ donc ils sont récurrents. Les deux autres sont transitoires car la probabilité de ne pas revenir en 1 (resp. en 2) si l'on est parti de là peut se calculer facilement (voir le schéma) et elle est strictement positive (égale à $\frac{1}{3}$ pour 1 par exemple).
3. Pour le calcul de ces probabilités, on étudie d'abord la trajectoire considérée sur le schéma en points et flèches. Cette trajectoire est une trajectoire infinie mais on se

convaint facilement que :

$$\begin{aligned} P & (X_0 = 1, X_1 = 3, X_2 = 3, \ldots) \\ & = P(X_0 = 1) \cdot P(X_1 = 3/X_0 = 1) \cdot P(X_2 = 3/X_1 = 3) \cdot \ldots \\ & = p_0 \cdot \frac{1}{2} \cdot 1 \cdot 1 \cdot \ldots = \frac{1}{2} p_0 \end{aligned}$$

De même,

$$\begin{aligned} P & (X_0 = 1, X_1 = 2, X_2 = 4, X_3 = 4, \ldots) \\ & = P(X_0 = 1) \cdot P(X_1 = 2/X_0 = 1) \cdot P(X_2 = 4/X_1 = 2) \cdot P(X_3 = 4/X_2 = 4) \cdot \ldots \\ & = p_0 \cdot \frac{1}{2} \cdot \frac{1}{2} \cdot 1 \cdot \ldots = \frac{1}{4} p_0 \end{aligned}$$

La dernière trajectoire considérée fournit un exemple de trajectoire de longueur infinie et de probabilité nulle (il n'existe evidemment pas trajectoire de longueur finie et de probabilité nulle !). En effet la probabilité de la trajectoire considérée est le produit de $\frac{1}{2}$ par lui même un nombre infini de fois. A chaque nouveau produit la probabilité est diminuée de moitié. Comme $\lim_{n\to\infty}(\frac{1}{2})^n = 0$, elle est donc nulle.

4. La répartition initiale étant uniforme, $\pi_0 = (p_0, q_0, r_0, s_0) = (\frac{1}{4}, \frac{1}{4}, \frac{1}{4}, \frac{1}{4})$ et donc $\pi_1 = \pi_0 \cdot \mathbb{P} = (\frac{1}{8}, \frac{1}{8}, \frac{7}{8}, \frac{7}{8})$ et de même $\pi_2 = \pi_1 \cdot \mathbb{P} = (\frac{1}{16}, \frac{1}{16}, \frac{7}{16}, \frac{7}{16})$. De la même façon, lorsque $\pi_0 = (\frac{1}{2}, \frac{1}{2}, 0, 0)$, on calcule $\pi_1 = \pi_0 \cdot \mathbb{P}$ et on trouve $\pi_1 = (\frac{1}{4}, \frac{1}{4}, \frac{1}{4}, \frac{1}{4})$ d'où l'on peut déduire sans nouveau calcul que $\pi_2 = (\frac{1}{8}, \frac{1}{8}, \frac{7}{8}, \frac{7}{8})$.
5. On vérifie que si π_0 s'écrit $\pi_0 = (0, 0, r_0, s_0)$, avec nécessairement $r_0 + s_0 = 1$, alors le produit $\pi_0 \cdot \mathbb{P}$ est encore égal à π_0. Toutes les distributions de cette forme sont donc stationnaires. Inversement, une distribution $\pi = (p, q, r, s)$ est stationnaire si elle vérifie $\pi \cdot \mathbb{P} = \pi$, c'est-à-dire si les 4 quantités p, q, r et s vérifie le système d'équations suivant :

$$\left\{ \begin{array}{rcl} \frac{1}{2}q & = & p \\ \frac{1}{2}p & = & q \\ \frac{1}{2}p + r & = & r \\ \frac{1}{2}q + s & = & s \end{array} \right. \tag{2.1}$$

Ce système implique que $p = \frac{1}{4}p$, ce qui n'est possible que si $p = 0$, de même pour q. Les deux autres inconnues, r et s, peuvent alors être choisies comme l'on veut, à condition, biensur que $r + s = 1$. Donc toute distribution stationnaire est de la forme $\pi = (0, 0, r, s)$.

Exercice 3 : On veut étudier l'effet de la présence d'un couple de lions dans une portion de savane dans laquelle cohabitent trois populations d'animaux dont les lions se nourrissent. On modélise les proies, antilopes (a), gnous (g) et zèbres (z) comme les états d'une chaîne de Markov dont les trajectoires sont des successions de proies mangées par les lions, comme par exemple (gzzaggaa). On fait l'hypothèse que la probabilité qu'un lion mange une proie a (ou g ou z) après avoir mangé une proie g (ou a ou z) ne dépend que de a (ou g ou z) et non de ce qu'il avait mangé avant a (et que cette probabilité est invariante au cours du temps). D'où la modélisation par une chaîne de Markov d'espace d'états $S = \{a, g, z\}$ et dont on propose la matrice de transition suivante :

$$\mathbb{P} = \begin{pmatrix} 0,5 & 0,1 & 0,4 \\ 0,2 & 0,3 & 0,5 \\ 0,2 & 0,2 & 0,6 \end{pmatrix}$$

1. Quelle est, selon ce modèle, la probabilité que les lions mangent un zèbre après avoir mangé une antilope ?

2. Des deux trajectoires suivantes, $(zaag)$ et $(zaga)$, quelle est la plus probable ? Justifier votre réponse par un calcul.
3. Tracer le diagramme en points et flèches. La chaîne est-elle irréductible ? Pourquoi ?
4. Compléter les deux valeurs manquantes dans la matrice suivante (en indiquant quels calculs vous faites) :

$$\mathbb{P}^2 = \begin{pmatrix} 0,35 & .... & 0,49 \\ 0,26 & 0,21 & 0,53 \\ 0,26 & 0,2 & ... \end{pmatrix}$$

5. Calculer la probabilité pour que la chaîne passe de l'état a à l'état z en deux étapes (les lions mangent une antilope le premier jour, une autre proie (quelconque) le second et un zèbre le troisième jour).
6. Les états de cette chaîne de Markov sont-ils récurrents ou transitoires ?
7. La mesure π_0 suivante est-elle une mesure invariante pour cette chaîne de Markov ? Justifier votre réponse.

S	a	g	z
π_0	$\frac{6}{21}$	$\frac{4}{21}$	$\frac{11}{21}$

Exercice 4 : Le magicien d'Oz a comblé tous les désirs des habitants du pays d'Oz, sauf peut-être en ce qui concerne le climat : au pays d'Oz en effet, s'il fait beau un jour, il est certain qu'il pleuvra ou neigera le lendemain, avec une probabilité égale qu'il pleuve ou qu'il neige. Et si le temps d'un jour est pluvieux ou neigeux, alors il reste inchangé dans 50% des cas le lendemain et ne devient beau que dans 25% des cas. Les habitants se sont plaint auprès du magicien, affirmant que, ce faisant, ils n'ont qu'un beau jour sur cinq, ce à quoi il a répondu qu'il s'agit d'une impression mais qu'en réalité il y a bien plus d'un beau jour sur cinq. Qu'en est-il ?

Pour le savoir, on se propose de modéliser l'évolution du climat au pays d'Oz par une chaîne de Markov à 3 états, $\{P, B, N\}$ (pour **P**luvieux, **B**eau, et **N**eigeux) dont la matrice de transition est, selon la description précédente :

$$\mathbb{P} = \begin{pmatrix} 0,5 & 0,25 & 0,25 \\ 0,5 & 0 & 0,5 \\ 0,25 & 0,25 & 0,5 \end{pmatrix}$$

1. L'un coefficient de $\mathbb{P}$ est nul. Expliquer pourquoi.
2. Calculer la probabilité d'une trajectoire (succession de jours) du type $BNPB$ en fonction de $\pi_0(B)$. Donner un exemple de trajectoire de probabilité nulle.
3. On a calculé le carré de la matrice $\mathbb{P}$ et trouvé $\mathbb{P}^2 = \begin{pmatrix} 0,438 & 0,188 & 0,375 \\ 0,375 & .... & 0,375 \\ 0,375 & 0,188 & 0,438 \end{pmatrix}$

   Compléter le coefficient manquant, en expliquant comment le calculer.
4. Donner la probabilité que le surlendemain d'un jour neigeux soit neigeux.
5. Le calcul des puissances successives de la matrice $\mathbb{P}$ montre qu'à partir de la puissance sixième elles restent pratiquement inchangées et égales à la matrice

$$\begin{pmatrix} 0,4 & 0,2 & 0,4 \\ 0,4 & 0,2 & 0,4 \\ 0,4 & 0,2 & 0,4 \end{pmatrix}$$

   Cela suggère que la distribution $\pi_0 = (0,4\,; 0,2\,; 0,4)$ est une distribution stationnaire pour cette chaîne de Markov. Vérifier qu'il s'agit bien d'une ditribution stationnaire.
6. En déduire la réponse à la question initiale : qui du magicien ou de la population du pays d'Oz a la bonne estimation du nombre de jours de beau temps ? Expliquer.