NOM :	Prénom :	Groupe :

Epreuve partielle : 10 Novembre 2006 (durée 1h30)
LSV1 : Mathématiques Appliquées à la Biologie

Les quatres exercices peuvent être traités indépendamment et valent respectivement 6 points, 4 points, 6 points et 6 points (barème indicatif). On soignera les explications.

Exercice 1 : On considère une population X_t modélisée par une chaîne de Markov à trois états $S = \{x_1, x_2, x_3\}$ et dont la matrice de transition est :

$$\mathbb{P} = \begin{pmatrix} 0,65 & 0,3 & 0,05 \\ 0 & 0,2 & 0,8 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

1. Quelle est, selon ce modèle, la probabilité que la population passe de l'état x_2 à l'état x_3 ?

$$\boxed{P(X_{t+1} = x_3 / X_t = x_2) =}$$

2. Calculer la probabilité d'une trajectoire du type $X_0 = x_1, X_1 = x_2, X_2 = x_2, X_3 = x_3$ en fonction de $\pi_0(x_1)$.

3. Donner un exemple de trajectoire de probabilité nulle.

4. On a calculé le carré de la matrice $\mathbb{P}$ et trouvé

$$\mathbb{P}^2 = \begin{pmatrix} 0,4225 & \ldots\ldots\ldots & 0,3225 \\ \ldots\ldots & 0,04 & \ldots\ldots \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

Compléter les coefficients manquants, en expliquant comment les calculer.

5. Quelle est, selon ce modèle, la probabilité que la population passe de x_1 à x_3 en deux étapes ?

$$\boxed{P(X_{t+2} = x_3/X_t = x_1) = \qquad\qquad\qquad\qquad\qquad\qquad}$$

6. Pour $\pi_0 = (0,5 \;\; 0,5 \;\; 0)$, calculer le produit $\pi_1 = \pi_0 \cdot \mathbb{P}$.

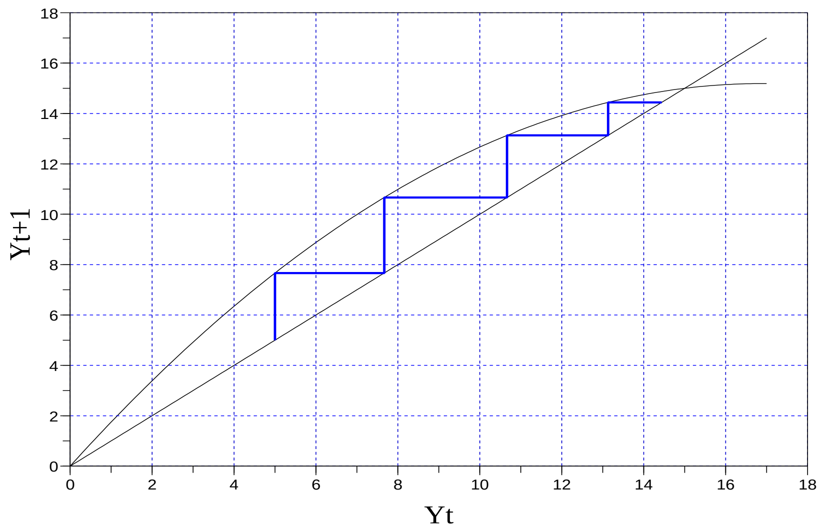
Exercice 2 : L'observation du développement d'une population d'animaux au cours du temps fait apparaître les trois états jeunes, adultes et décès, que nous noterons respectivement j, a et d. Parmi les jeunes, chaque année 30% deviennent adultes et 5% décèdent et parmi les adultes seuls 20% restent en vie après un an. Bien entendu l'état de mort subsiste avec probabilité 1 d'une année à la suivante.

1. On modélise cette dynamique par une chaine de Markov à trois états $S = \{j, a, d\}$. Ecrire sa matrice de transition.

2. Si l'on suppose qu'au départ la population est de taille 1000 et se compose approximativement de 500 jeunes et de 500 adultes, combien y aura-t-il de jeunes et d'adultes respectivement après un an, selon ce modèle ?

3. Pour les uns et pour les autres, leur nombre a diminué. Pouvez-vous l'expliquer ? Quel défaut du modèle cela fait-il apparaître ?

Exercice 3 : La figure ci-dessous montre une représentation en toile d'araignée (cobweb) de la trajectoire de la dynamique $\Delta Y_t = 0,8Y_t(1 - Y_t/15)$ de condition initiale $Y_0 = 5$.



1. Comment appelle-t-on ce type de dynamique ? A quoi correspond la constante 0.8 ?

2. Calculer la valeur de Y_1 (indiquer vos calculs)

3. Sans calcul supplémentaire, donner une valeur approchée de Y_3 lue sur sa représentation. Expliquer où l'on peut lire cette valeur.

4. Pouvez-vous deviner une valeur approchée de Y_{10} ? Justifier votre réponse.

Exercice 4 : On s'intéresse à la solution $y(t)$ de l'équation différentielle $y' = 50 - y$ de condition initiale $y(0) = 100$.

1. Indiquer les coordonnées d'un vecteur tangent à cette solution en $t = 0$.

2. On a calculé la valeur approchée de cette solution par la méthode d'Euler en prenant le pas $h = 0,5$ et on a obtenu les valeurs suivantes :

t	0	0,5	1	1,5	2	2,5
Solution approchée	100	.....	62,5	......	53,125	51,5625

   Calculer les deux valeurs manquantes (en expliquant vos calculs).

3. Comme cette équation est linéaire à coefficients constants, on peut la résoudre par explicitement. On obtient $y(t) = Ce^{-t} + A$. Calculer les constantes C et A.

4. Compléter le tableau suivant (en explicitant vos calculs) :

t	0	0,5	1	1,5	2	2,5
Solution exacte	100	80,326	68,303	61,156	56,767	.....

5. Avant même de calculer la valeur manquante dans le tableau précédent, on savait qu'elle était supérieure à 50. Pourquoi ?