Université de Nice NOM : Prénom : Groupe :
LSV1-MAB

Epreuve d'examen : 13 Décembre 2007 (durée 2h00)
LSV1 : Mathématiques Appliquées à la Biologie
Matériel autorisé : une calculatrice, à l'exclusion de tout appareil suceptible d'être connecté à un réseau de communication
Document autorisé : une feuille A4 écrite de la main du candidat ou de la candidate.

Les quatre exercices peuvent être traités indépendamment et valent respectivement 7 (+3 bonus) points, 7 points, 6 points, et 3 points-bonus (barème indicatif). On soignera les explications, à donner dans l'espace laissé libre avant les boites-réponses.

Exercice 1 : On modélise l'évolution naturelle, lorsqu'il n'y a pas exploitation, de la population des baleines de l'océan atlantique par la dynamique suivante :

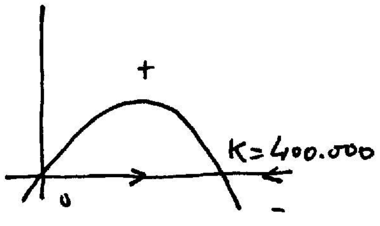
$$y' = 0,08y\left(1 - \frac{y}{400.000}\right).$$

1. De quel type de modèle s'agit-il ? Que représentent les constantes 0,08 et 400.000 ?

Il s'agit d'un modèle logistique	0.08 représente le taux de croissance intrinsèque.
400.000 représente la capacité biotique	

2. On suppose que $y(0) > 0$; que pouvez-vous dire de $\lim_{t\to\infty} y(t)$?

On sait que l'équation logistique $y' = ay(1 - \frac{y}{K})$ admet un équilibre stable en $y = K = 400.000$ vers lequel tendent toutes les solutions issues d'un point $y(0) > 0$



$\lim_{t\to\infty} y(t)$ = 400.000

3. A l'issue d'une longue période de surexploitation, on estime que l'effectif de cette population de baleine est tombé à 70.000. En supposant qu'on interdit alors son exploitation, calculer, au moyen de la méthode d'Euler, une approximation de son évolution y_0, y_1, y_2, ...en prenant un pas de temps $h = 1$. On rappelle que la méthode d'Euler pour l'équation $y' = f(y)$ s'écrit :

$$\begin{cases} t_n &= t_{n-1} + h \\ y_n &= y_{n-1} + hf(y_{n-1}). \end{cases} \quad (1)$$

On a $y_n = y_{n-1} + h \cdot 0{,}08\, y_{n-1}\left(1 - \frac{y_{n-1}}{400.000}\right)$, avec $h = 1$

$= y_{n-1}\left(1 + 0{,}08\left(1 - \frac{y_{n-1}}{400.000}\right)\right)$

En partant de $y_0 = 70.000$ on trouve avec la calculatrice successivement

$y_1 = 74.620$	$y_2 \approx 79.476,0$

4. On suppose que l'on autorise un quota de pêche, et que la dynamique est alors

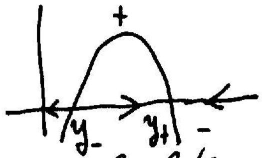
$$y' = 0,08y\left(1 - \frac{y}{400.000}\right) - 3.000.$$

Indiquer quels sont les équilibres de cette nouvelle dynamique et préciser leur stabilité. On donnera les valeurs avec un chiffre après la virgule; si vous n'êtes pas en mesure d'effectuer le calcul, vous vous aiderez de la figure 1.

Les équilibres sont les solutions y de $0,08y(1-\frac{y}{400\,000})-3000=0$

equation qui est de la forme $ay^2+by+c=0$

avec $a=\frac{-0,08}{400\,000}$ $b=0,08$ et $c=-3000$



les formules usuelle du trinôme donne, apres calcul approché à la calculatrice.

Les équilibres sont : $y_- \approx 41.886,1$ et $y_+ \approx 358.113,9$

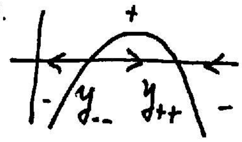
Leur stabilité : y_- est instable et y_+ est stable

5. Comment va varier la population de baleines dans ce cas sachant que $y(0) = 70.000$?

On constate que $70.000 > y_-$ et donc $y(t)$ va augmenter et tendre vers l'équilibre y_+

La population va augmenter et tendre vers y_+

6. **(bonus)** Reprendre les 3 dernières questions en supposant cette fois qu'au dela du quota légal les activités de pêche illicites portent le modèle à $y' = 0,08y(1 - \frac{y}{400.000}) - 5.000$.



Les équilibres sont : $y_{--} = 77.525,5$ et $y_{++} = 322.474,5$

Leur stabilité : y_{--} est instable et y_{++} est stable

La population va diminuer et aller à 0 car $y(0) = 70000 < y_{--}$

Exercice 2 : On observe simultanément une population de renards et une population de lapins se partageant un même territoire. On modélise leur dynamiques respectives $R(t)$ et $L(t)$ (effectifs exprimés dans des unités adhoc) par le système différentiel suivant :

$$\begin{cases} \frac{dL}{dt} &= 2L - 0,1LR \\ \frac{dR}{dt} &= -30R + 0,05LR \end{cases} \qquad (2)$$

1. Indiquer le sens des 4 coefficients apparaissant dans ce système

2 représente le taux de croissance intrinsèque des lapins

$-0,1$ représente le coefficient d'interaction des renards sur les lapins

-30 représente le taux de décroissance intrinsèque des renards

$+0,05$ représente le coefficient d'interaction des lapins sur les renards

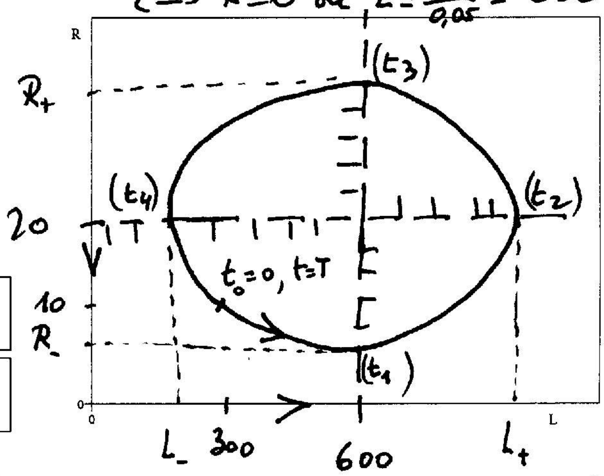
2. Calculer les équations des 2 isoclines verticales et horizontales de ce système et les tracer sur un même graphique.

isocline verticale : $2L - 0{,}1LR = 0 \Leftrightarrow L(2 - 0{,}1R) = 0$

$\Leftrightarrow L = 0$ ou $R = \frac{2}{0{,}1} = 20$.

isocline horizontale : $-30R + 0{,}05LR = 0 \Leftrightarrow R(-30 + 0{,}05L)$

$\Leftrightarrow R = 0$ ou $L = \frac{30}{0{,}05} = 600$



isoclines verticales	$L = 0$ ou $R = 20$
isoclines ~~verticales~~ horizontale	$R = 0$ ou $L = 600$

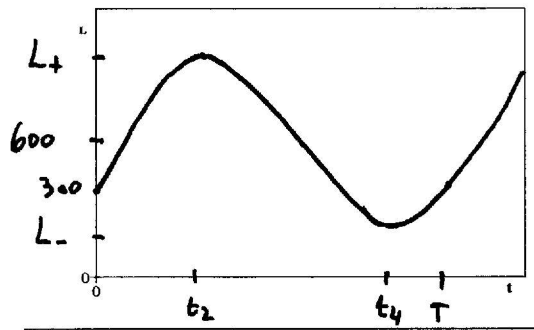
3. Quels sont les équilibres de cette dynamique ?

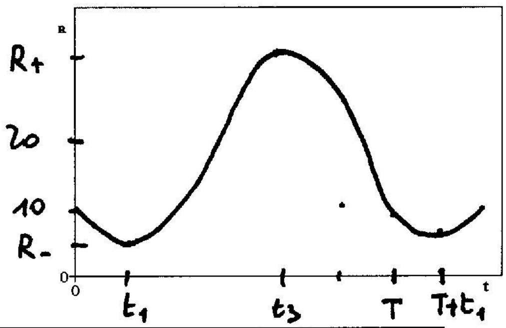
Les équilibres sont à l'intersection d'une isocline verticale et d'une isocline horizontale

On a donc ou bien $L = 0$ et $R = 0$ ou bien $R = 20$ et $L = 600$

Les équilibres sont $(0,0)$ et $(600, 20)$.

4. On suppose qu'à l'instant initial $t = 0$, les populations de lapins $L(t)$ et de renards $R(t)$ valent respectivement $L(0) = 300$ et $R(0) = 10$. Quelle sera selon ce modèle la dynamique de ces deux populations à court terme ? On indiquera d'une part l'allure de la trajectoire correspondante sur le dessin de la question 2 puis l'allure des deux graphes $t \mapsto L(t)$ et $t \mapsto R(t)$ comme fonction de t.





Issue de $M_0 = (300, 10)$, à court terme la population de lapins va augmenter.

et la population de renards va diminuer

Exercice 3 : Pour estimer l'abondance totale d'Arthropodes (insectes plus araignées) dans une prairie, M. Gillon (1969) a mis au point une méthode d'échantillonnage. Celle-ci consiste à utiliser un filet fauchoir (semblable à un filet papillon, voir figure) et à effectuer un certain nombre de passages du filet dans les herbes à une minute d'intervalle (pour éviter l'émigration et l'immigration d'animaux) sur la même surface (de 10 m2). Après chaque passage, les animaux capturés sont retirés du filet et comptés (tableau, ligne na). On se propose de valider cette méthode en analysant les données obtenues.

Passage	1	2	3	4	5	6	7	8
na	65	45	33	25	16	12	8	6
Effectifs cumulés	65	110	143	168	184	196	204	210

1. Le tracé des données des x_t (na) en fonction de t (passage) suggère un modèle du type $x_t = ce^{-kt}$. Comment choisir la fonction g telle que si l'on pose $u_t := g(x_t)$ ce modèle devient $u_t = at + b$; calculer a et b en fonction de c et k.

On choisit $g(x) = \ln(x)$. Donc

$u_t = g(x_t) = \ln(c\, e^{-kt}) = \ln(c) + \ln(e^{-kt}) = \ln(c) - k \ln(e^t)$

$= \ln(c) - kt$

u=g(x)= $\ln(x)$	a= $-k$	b= $\ln(c)$

2. Dans le tableau ci-dessous, on a procédé à la régression linéaire des u_t sur t selon la méthode MCO. Complèter les 8 cellules vides.

On calcule $u_2 = \ln(x_2) = \ln(45)$ et $u_3 = \ln(x_3) = \ln(33$

On a moyenne = somme / 8 ; et somme = 4.17 + ... + 14.33.

On suit que $\hat{a} = \frac{\mathrm{Cov}(t,u)}{\mathrm{Var}\, t} = -\frac{1,7997}{5,2500}$ et $\hat{b} = \bar{u} - \hat{a}\bar{t}$

$r_{tu} = \frac{\mathrm{Cov}(t,u)}{\sqrt{\mathrm{Var}(t)\,\mathrm{Var}(u)}} = 0,997..$ et $R^2 = (r_{tu})^2 =$

	t=	x_t=	u_t=	t^2=	(u_t)^2=	t*u_t=
	1	65	4,17	1,00	17,43	4,17
	2	45	3,81	4,00	14,49	7,61
	3	33	3,50	9,00	12,23	10,49
	4	25	3,22	16,00	10,36	12,88
	5	16	2,77	25,00	7,69	13,86
	6	12	2,48	36,00	6,17	14,91
	7	8	2,08	49,00	4,32	14,56
	8	6	1,79	64,00	3,21	14,33
Somme	36	210	23,83	204	75,90	92,82
Moyenne	4,50	26,25	2,98	25,50	9,49	11,60

Var(t)	Var(u)	Cov(t,u)	a_chapeau	b_chapeau	r_tu	R^2
5,2500	0,6181	-1,7997	-0,3428	4,5208	-0,9991	0,9981

3. Quelle est l'équation de la droite de regression des u sur les t ? et la regression deduite par nmt

Votre équation : $u = -0,34\, t + 4,52$

4. Au vu de cette expérience, peut-on valider la méthode de Gillon (justifiez).

Je valide OUI (~~NON~~)	Justification $R^2 = 0,998$ est très voisin de 1.

Exercice 4 (bonus) : Les *effectifs cumulés* du tableau correspondent à $y_t = x_1 + x_2 + \ldots + x_t$. Si on pose $(x_t =)ce^{-rt} = \int_{t-1}^{t} ke^{-rs}ds$, le calcul montre que $c = \frac{k}{r}(e^r - 1)$, et que $y_t = k\int_0^t e^{-rs}ds$.

1. En calculant $k\int_0^t e^{-rs}ds$ et en utilisant que $e^{-rt} = \frac{1}{c}x_t$, vérifier que $y_t = Ax_t + B$. Préciser les valeurs que vous avez ainsi obtenues pour A et B en fonction de c, k, et r.

$$y_t = k\int_0^t e^{-rs}ds = k\left[\frac{-1}{r}e^{-rs}\right]_{s=0}^{s=t} = k\left(\frac{1}{r} - \frac{e^{-rt}}{r}\right)$$

$$= \frac{k}{r} - \frac{k}{r}\frac{x_t}{c} = \frac{k}{r} - \frac{\cancel{k}}{\cancel{r}}\cdot\frac{\cancel{r}}{\cancel{k}}\cdot\frac{1}{e^r-1}x_t = \frac{-1}{e^r-1}x_t + \frac{k}{r}.$$

A= $-\frac{1}{e^r-1}$	B= $\frac{k}{r}$

2. Pour la pratique de Gillon, indiquer ce que représente le nombre $y_\infty = x_1 + x_2 + x_3 + \ldots$ en termes de nombre d'arthropodes ?

y_∞ n'est autre que le nombre d'arthropodes initialement présent dans la parcelle

3. Dans le modèle $x_t = ce^{-rt}$, que vaut $x_\infty = \lim_{t\to\infty} ce^{-rt}$.

$$\lim_{t\to\infty} c\,e^{-rt} = c\cdot\lim_{t\to\infty} e^{-rt} = c\,\text{"}e^{-\infty}\text{"} = c\cdot 0 = 0$$

$x_\infty = \lim_{t\to\infty} ce^{-rt} =$ 0

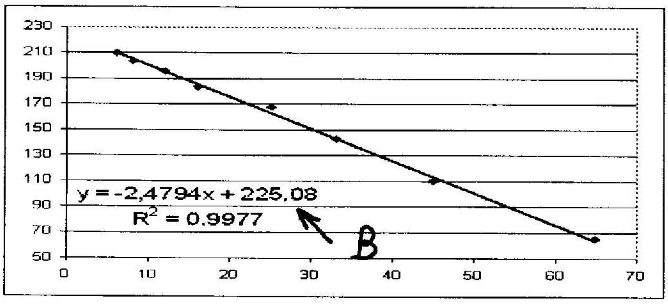
4. Dans le modèle $y_t = Ax_t + B$, que vaut y_∞ ?

$$y_\infty = Ax_\infty + B = A\cdot 0 + B = B$$

$y_\infty =$ B

c'est l'ordonnée à l'origine de la droite de regression.

5. On a procédé à la regression linéaire des y_t sur le x_t et on a obtenu



Selon cette regression, combien y avait-il en tout d'arthropodes dans les 10 mètres carrés traités ?

Nombre d'arthropodes dans les $10m^2$ traités = 225

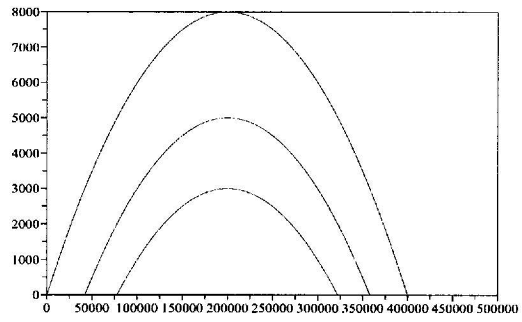


FIG. 1 – Graphique des fonctions $0,08y\,(1 - \frac{y}{400.000}) - Q$, avec $Q = 0$, $Q = 3.000$, et $Q = 5.000$ (exercice 1).