Université de Nice NOM : Prénom : LSV1-MAB

Epreuve partielle, 29 octobre 2007, 17 :30-19 :30
LSV1 : Mathématiques Appliquées à la Biologie
Matériel et documents autorisés : Calculatrice et une feuille A4 (recto-verso) écrite de la main du candidat

Les quatre exercices peuvent être traités indépendamment et valent respectivement 5 points, 5 points, 6 points et 6 points (barème indicatif). On soignera les explications. Les réponses doivent être données sur cette feuille.

Exercice 1 :

Un petit appartement comportant un salon-salle à manger (s), une cuisine (cu), et une chambre à coucher (ch) est envahis par des mouches. On observe que chaque heure 20% des mouches du salon vont dans la cuisine et 20% dans la chambre, que parmi celles qui volaient dans la cuisine, 25% vont dans le salon et 20% dans la chambre ; enfin, 40% des mouches de la chambre la quitte pour la cuisine et 20% pour le salon. On modélise cette dynamique par une chaine de Markov X_t d'espace d'états $S = \{s, cu, ch\}$.

1. Compléter la matrice de transition :

$$\mathbb{P} = \begin{pmatrix} .... & 0.2 & 0.2 \\ 0.25 & .... & 0.2 \\ 0.2 & .... & .... \end{pmatrix}$$

2. Quelle est, selon ce modèle, la probabilité $P(X_{t+1} = cu/X_t = cu)$ et que représente-t-elle ?

$P(X_{t+1} = cu/X_t = cu) =$

3. Calculer la probabilité d'une trajectoire X_t telle que $X_0 = s$, $X_1 = cu$, $X_2 = cu$ et $X_3 = s$ en fonction de la probabilité initiale $\pi_0(s)$.

4. Connaissant la répartition initiale $\pi_0 = (0.3 \;\; 0.6 \;\; 0.1)$, calculer la répartition à l'étape suivante π_1.

$\pi_1(s) =$, $\pi_1(cu) = 0.43$, $\pi_1(ch) =$

Exercice 2 :

On étudie l'effectif P_t d'une population d'insectes en fonction du temps t mesuré en jours.

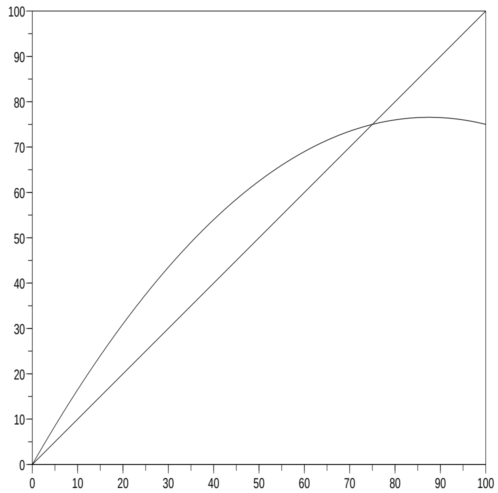
1. On suppose tout d'abord que les variations de cette population sont proportionnelles à son effectif. Comment appelle-t-on cette dynamique ?

2. S'il y a 15 insectes le deuxième jour et 60 le quatrième, quel était l'effectif P_0 à l'instant initial ?

3. On suppose à présent que cette population suit un modèle logistique $\Delta P_t = rP_t - sP_t^2$ avec $r = 0.75$ et $s = 10^{-2}$ et avec cette fois $P_0 = 10$. Calculer les deux premiers points de sa trajectoire (indiquer vos calculs) :

$P_1 =$	$P_2 =$

4. Tracer une représentation en cobweb de la trajectoire correspondant à $P_0 = 10$ sur le graphique suivant (on positionera clairement les valeurs P_0, P_1 et P_2) :



5. Comment varierait, selon ce modèle, la population d'insectes dans le cas $P_0 = 20$? Même question pour le cas $P_0 = 75$.

Exercice 3 :

On considère une population de poissons ayant trois classes d'ages, juveniles, préadultes et adultes et ayant une matrice de Leslie données par

$$\begin{pmatrix} 0 & 1 & 10 \\ 0.4 & 0 & 0 \\ 0 & 0.3 & 0 \end{pmatrix}$$

1. Ecrire le système dynamique correspondant et indiquer le sens des quatre coefficients 1, 10, 0.4 et 0.3

$$\begin{cases} j_{t+1} &= \text{..........} \\ p_{t+1} &= \text{..........} \\ a_{t+1} &= \text{.........} \end{cases} \tag{1}$$

2. Ces formules (1) permettent, à partir des effectifs initiaux des trois classes, (j_0, p_0, a_0), de calculer les effectifs (j_1, p_1, a_1) à l'instant suivant $t = 1$, puis, (j_2, p_2, a_2) à l'instant $t = 2$ et ainsi de suite. Complétez les cases vides du tableau puis expliquez vos calculs.

t	0	1	2	3	4	5
j_t	90	550		328	$734,4$	$354,4$
p_t	50		220	$74,4$	$131,2$	$293,76$
a_t	50	15	$10,8$	66		$39,36$

3. Si l'on désigne par $N_t = j_t + p_t + a_t$ l'effectif total de la population à l'instant t, on peut également calculer à partir de (1) les termes successifs de la suite (N_t). De la même façon, on peut calculer la suite N_{t+1}/N_t. Complètez les cases vides de tableau, puis expliquez vos calculs. Que constatez-vous ?

t	0	1	2	3	4	$\cdots$	26	27	28	29	30
N_t			$416,8$		$887,92$	$\cdots$	30133	36039	42356	50575	60189
N_{t+1}/N_t	3.16		$1,12$		0.77	$\cdots$		1.18			

4. Le calcul des valeurs propres de la matrice L indique qu'elle possède une valeur propre dominante égale (approximativement) à $1,19$. Que pouvez-vous en déduire concernant l'évolution des populations $(j_t,\ p_t,\ a_t)$ et concernant l'évolution de la population totale N_t ?

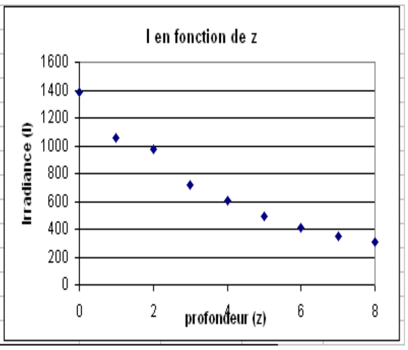
Exercice 4 :

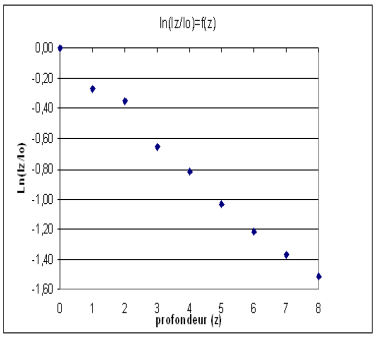
En milieu diffusif (par exemple dans l'eau de mer, chargée en particules), il est généralement admis que la lumière est atténuée selon une loi exponentielle décroissante (loi de Beer-Lambert) :

$$I_z = I_0 \exp(-K_d * z),$$

où z est la profondeur, I_z l'irradiance à la profondeur z, I_0 l'irradiance en surface et K_d le coefficient d'atténuation. Pour étudier l'atténuation de la lumière par la colonne d'eau, on a immergé au bout d'un cable un capteur de lumière (par exemple de type LI-COR) et l'irradiance est mesurée tous les mètres. Pour la campagne de mesure d'avril 2007, dans la baie de Golfe-Juan, on a obtenu les valeurs indiquées ci-dessous.

	Profondeur (z)	Irradiance (Iz)	ln (Iz / Io)
	0	1384	0,00
	1	1059	-0,27
	2	972	-0,35
	3	722	-0,65
	4	610	-0,82
	5	492	-1,03
	6	411	-1,21
	7	352	-1,37
	8	305	-1,51
Moyenne:	**4**	**700,78**	**-0,80**
variance:	**6,67**	**120357,06**	**0,24**





1. On a représenté sur le premier dessin ci dessus l'irradiance $I(z)$ en fonction de la profondeur z. Serait-il judicieux d'effectuer une regression linéaire sur ces données ? Justifier votre réponse.

2. Sur la seconde figure on a représenté cette fois la quantité $\ln(I_z/I_0)$ en fonction de la profondeur z. Pourquoi est-il naturel de choisir cette représentation ?

3. Que représente le paramètre K_d sur cette figure ? Calculer sa valeur[1].

4. Calculer le R^2 et commenter la valeur trouvée.

[1] On rappelle que $cov_{xy} = \frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n}(x_i - m_x)(y_i - m_y) = \frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n} x_i y_i - m_x m_y$.