NOM :
PRENOM : Corrigé

Date :
Groupe :

Mathématiques pour la Biologie (semestre 2) : Feuille-réponses du TD 1
Le modèle de Lotka-Volterra

On répondra aux questions posées aussi clairement que possible dans les espaces prévus et on remettra cette *feuille-réponses* en fin de séance à l'enseignant chargé du Cours/TD.

L'étude de l'évolution en interaction d'une population de babouins (les proies) et d'une population de guépards (les prédateurs) a conduit au modèle dynamique de Lotka-Volterra suivant :

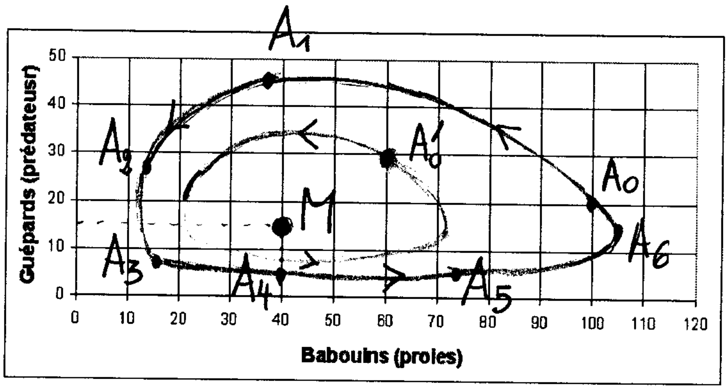
$$\begin{cases} x' &= 3x - 0,2xy \\ y' &= 0,1xy - 4y \end{cases} \tag{1}$$

où $x(t)$ représente le nombre de babouins et y(t) le nombre de guépards à l'instant t. On suppose qu'à l'instant initial $t = 0$, il y a 100 babouins et 20 guépards (donc $x(0) = 100$ et $y(0) = 20$) et on s'interroge pour savoir comment, lorsque t augmente, les effectifs de ces deux populations vont évoluer.

1. On a calculé une solution approchée de ce système d'équations différentielles et on a trouvé les valeurs suivantes :

t	0	0,25	0,5	1	1,5	1,75	2
$x(t)$	100	37	12	13	40	73	107
$y(t)$	20	44	27	6	3	4	14

On désigne par A_0 le point de coordonnées $(x\ ;y) = (100\ ;20)$, par A_1 celui de coordonnées $(x\ ;y) = (37\ ;44)$, et ainsi de suite jusqu'à A_6. Placer les 7 points sur la figure ci dessous puis en deduire l'allure de la trajectoire du système (1) issue du point A_0.



2. On sait que les deux fonctions $x(t)$ et $y(t)$ sont des fonctions périodiques de période T. Quelle est la valeur approximative de T ? Les populations de babouins et de guépards oscillent donc, selon ce modèle, entre deux valeurs minimale et maximale. Déterminer approximativement ces deux valeurs extrêmes pour chacune des deux populations.

• Selon le tableau, on voit qu'il s'écoule un temps $t = 2$ entre A_0 et A_6
Donc la valeur approximative de T est un peu supérieure à 2 (p.ex. 2,1)
• La population des babouins $x(t)$ oscille entre 10 et 107 environs
La population des guépards $y(t)$ oscille entre 3 et 45 environs.

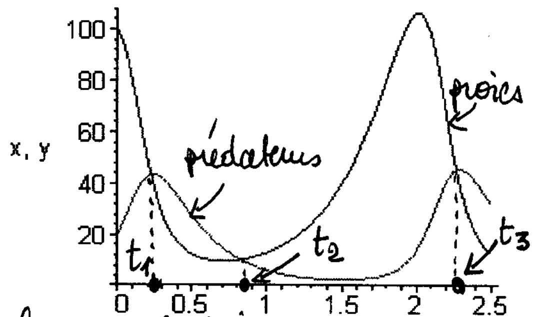
3. En vous servant du dessin précédent, reprendre la question précédente mais en supposant cette fois qu'il y a au départ 60 babouins et 30 guépards.

Cette condition initiale ($x(0) = 60$, $y(0) = 30$) correspond au point A'_0. On n'a pas d'information sur sa période. La trajectoire issue de ce point oscille approximativement entre 20 et 75 (pour $x(t)$) et entre 9 et 33 (pour $y(t)$).

4. Que se passe-t-il si $x(0) = 40$ et $y(0) = 15$? Expliquez.

Le point $(40, 15)$ est "au centre" des oscillations : c'est l'équilibre de la dynamique. Pour le vérifier, il faut s'assurer que $x' = 0$ et $y' = 0$.
On a bien en effet :
$x' = 3x - 0{,}2xy = 3(40) - 0{,}2(40)(15) = 120 - 120 = 0$
$y' = 0{,}1xy - 4y = 0{,}1(40)(15) - 4(15) = 60 - 60 = 0$.
La trajectoire issue de M est le point M lui-même.

5. On a représenté sur la figure suivante les graphes des deux fonctions $x(t)$ et $y(t)$ de la première question sur un intervalle de temps légèrement plus long que leur période. Ces deux graphes se coupent trois fois sur cet intervalle de temps, aux instants t_1, t_2 et t_3. Expliquer la dynamique de chacune des deux populations de babouins et de guépards durant chacun des trois intervalles $[0, t_1]$, $[t_1, t_2]$ et $[t_2, t_3]$ successivement.



a) Pour $t \in [0, t_1]$, la population des prédateurs augmente et cela fait diminuer fortement celle des proies.
b) Pour $t \in [t_1, t_2]$, les proies ont tant diminuées que les prédateurs commencent à décliner à leur tour par manque de nourriture.
c) Pour $t \in [t_2, t_3]$, il reste si peu de prédateurs que les proies en profitent pour se remettre à croître et, lorsque leur nombre est suffisant, cela permet une nouvelle augmentation des prédateurs.

6. Selon ce modèle, aucune des deux populations ne s'éteint mais l'une d'elle frôle l'extinction. Il y a donc un risque sérieux pour elle si, dans la réalité, sa dynamique s'écarte légèrement du modèle théorique. Quelle mesure préconiseriez-vous pour éviter ce risque ?

Selon le modèle, la populations des prédateurs frôle l'extinction une fois par cycle (entre t_2 et t_3 au cours du 1^e cycle). Il serait donc prudent de l'augmenter sensiblement, par un apport extérieur, afin de déplacer le cycle (qui oscille entre 0 et 45 environs) pour qu'il oscille par exemple entre 9 et 33 (comme le cycle de la question 3).

7. Calculer la fonction $x(t)$ si l'on suppose $y(t) = 0$ (dynamique des babouins en l'absence de guépards) dans le cas où $x(0) = 100$. De même calculer la fonction $y(t)$ si l'on suppose $x(t) = 0$ (dynamique des guépards en l'absence de babouins) dans le cas où $y(0) = 20$.

La dynamique des babouins en l'absence de guépards : $x' = 3x$
donc $x(t) = x(0)e^{3t} = 100\,e^{3t}$.
La dynamique des guepards en l'absence de babouins : $y' = -4y$
donc $y(t) = y(0)e^{-4t} = 20\,e^{-4t}$.