NOM : Corrigé
PRENOM :

Date :
Groupe :

Mathématiques pour la Biologie (semestre 2) : Feuille-réponses du TD 3
Modèle dynamique pour deux espèces en compétition

Cette *feuille-réponses* est prévue pour une séance complète (2 heures environs).

Le système de Lotka-Volterra nous a permis de modèliser la dynamique de deux populations présentant une relation de type proies-prédateurs. Nous allons à présent modéliser la dynamique de *deux populations en compétition*, par exemple parce qu'elles partagent la même nourriture ou le même territoire. Notre objectif est d'étudier les possibilités de coexistence de ces deux populations. On choisit de faire les hypothèses suivantes :

- En l'absence de l'autre espèce, chacune des deux espèces suit un modèle logistique ($x'(t) = (\alpha_1 - \beta_1 x(t))x(t)$ et $y'(t) = (\alpha_2 - \beta_2 y(t))y(t)$).
- le taux de mortalité supplémentaire pour chacune des espèces dû à la présence de l'autre espèce est proportionnel à la fois à la taille de l'une et de l'autre des deux populations (et donc proportionel à leur produit).

Sous ces hypothèses, le système peut s'écrire :

$$\begin{cases} x'(t) &= (\alpha_1 - \beta_1 x(t) - \gamma_{12} y(t))x(t) \\ y'(t) &= (\alpha_2 - \beta_2 y(t) - \gamma_{21} x(t))y(t) \end{cases} \tag{1}$$

où les constantes α_1, α_2, β_1, β_2, γ_{12}, et γ_{21} sont supposées positives.

Exercice 1. : On écrit aussi parfois ce type de modèle dynamique sous la forme

$$\begin{cases} x'(t) &= r_1 x(t)(1 - \frac{x(t)}{K_1}) - \gamma_{12} x(t)y(t) \\ y'(t) &= r_2 x(t)(1 - \frac{x(t)}{K_2}) - \gamma_{21} x(t)y(t) \end{cases} \tag{2}$$

Indiquer le sens des 6 coefficients, r_1, K_1, ... et donner leur expression en fonction des coefficients du système (1)

r_1 = taux de croissance intrinsèque de la population $x(t)$

r_2 = — " — — " — $y(t)$

K_1 = capacité biotique de la population $x(t)$ (en l'absence de l'autre population)

K_2 = — " — — " — $y(t)$ — " —

γ_{12} = coefficient d'interaction de $y(t)$ sur $x(t)$ (mortalité par concurrence de y sur x)

γ_{21} = — " — $x(t)$ sur $y(t)$

On a $x' = r_1 x - \frac{r_1}{K_1}x^2 - \gamma_{12}xy$
et $x' = \alpha_1 x - \beta_1 x^2 - \gamma_{12}xy$

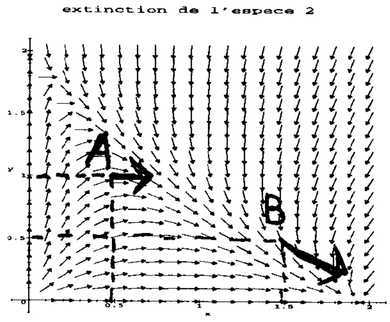
Donc $r_1 = \alpha_1$ et $K_1 = \frac{r_1}{\beta_1}$

De même $r_2 = \alpha_2$ et $K_2 = \frac{r_2}{\beta_2}$.

Exercice 2. : L'exemple suivant de dynamique de deux populations en compétition illustre ce que l'on appelle le *principe d'exclusion compétitive*. Voici son système differentiel et,plus bas, son champs de vecteurs :

$$\left\{\begin{array}{lcl} x'(t) & = & (1-\frac{1}{2}x(t)-\frac{1}{3}y(t))x(t) \\ y'(t) & = & (1-x(t)-\frac{1}{2}y(t))y(t) \end{array}\right. \tag{3}$$

1. Calculer les coordonnées (x', y') du vecteur de ce champs de vecteurs situé au point $A = (x = 1/2, y = 1)$ et vérifier sa direction sur la figure. Même question pour celui du point $B = (x = 3/2, y = 1/2)$.



Au point A :

$x' = (1 - \frac{1}{2}x - \frac{1}{3}y)x = (1 - \frac{1}{4} - \frac{1}{3})(\frac{1}{2}) = \frac{5}{24} \simeq 0{,}21$

$y' = (1 - \frac{1}{2} - \frac{1}{2})(1) = 0$

Au point B :

$x' = (1 - \frac{3}{4} - \frac{1}{6})(\frac{3}{2}) = \frac{3}{24} \simeq 0{,}125$

$y' = (1 - \frac{3}{2} - \frac{1}{4})(\frac{1}{2}) = -\frac{3}{8} \simeq -0{,}375$

Remarquons que le point A se situe sur l'isocline horizontale (puisque $y' = 0$).

2. Calculer les équations de deux droites qui sont les isoclines verticales du système (3)(en résolvant l'équation $x' = 0$).

$x' = 0 \Leftrightarrow (1 - \frac{1}{2}x - \frac{1}{3}y)x = 0 \Leftrightarrow \left\{\begin{array}{l} x = 0 \\ y = 3 - \frac{3}{2}x \end{array}\right.$

La droite verticale $x = 0$ et la droite d'équation $y = 3 - \frac{3}{2}x$ sont les deux isoclines verticales

3. Même question pour les deux isoclines horizontales.

$y' = 0 \Leftrightarrow (1 - x - \frac{1}{2}y)y = 0 \Leftrightarrow \left\{\begin{array}{l} y = 0 \\ y = 2 - 2x \end{array}\right.$

La droite horizontale $y = 0$ et la droite d'équation $y = 2 - 2x$ sont les deux isoclines horizontales.

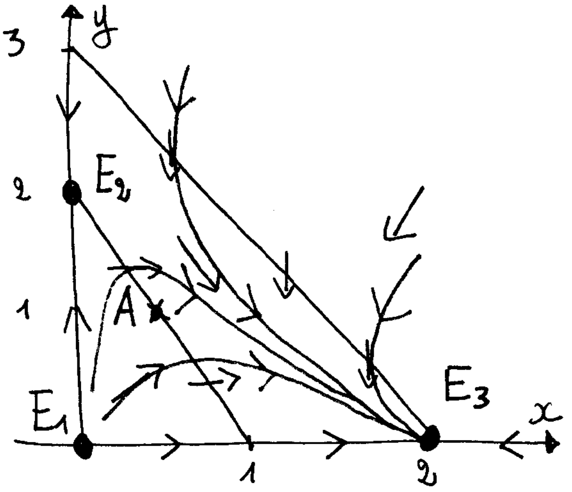
4. Combien le système (3) a-t-il de points d'équilibres ? Calculer leurs coordonnées.

Les points d'équilibre sont à l'intersection entre une isocline verticale et une isocline horizontale. Il y a donc 4 possibilités :

$E_1 \left\{\begin{array}{l} x = 0 \\ y = 0 \end{array}\right.$ $E_2 \left\{\begin{array}{l} x = 0 \\ y = 2 - 2x \end{array}\right.$ $E_3 \left\{\begin{array}{l} y = 3 - \frac{3}{2}x \\ y = 0 \end{array}\right.$ $\left\{\begin{array}{l} y = 3 - \frac{3}{2}x \\ y = 2 - 2x \end{array}\right.$

Comme $3 - \frac{3}{2}x = 2 - 2x \Leftrightarrow x = -1$, on voit que les deux droites ne se coupent pas dans le quadrant $(x \geq 0, y \geq 0)$. Il y a donc 3 points d'équilibre dans ce quadrant, E_1, E_2, E_3.

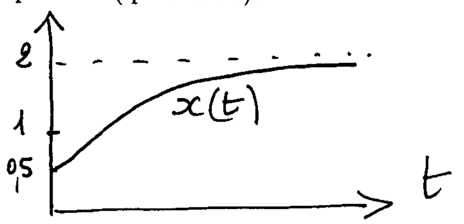
5. Dans le plan (x, y), tracer les isoclines du système, repérer les points d'équilibres et indiquer dans chaque région (et sur les isoclines) les flèches donnant l'allure du champs de vecteurs. Puis en déduire l'allure approximatives de quelques trajectoires que l'on tracera sur le dessin.

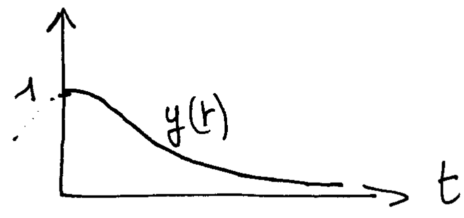


6. Que pensez-vous de l'évolution, selon ce modèle, des deux populations ? Vont-elles coexister ou l'une d'elles va-t-elle disparaître ? Expliquer.

Sur la figure, on constate que toutes les trajectoires convergent vers l'équilibre E_3 qui est un point pour lequel $y = 0$.
On observe donc une extinction inéluctable de la population $y(t)$ lorsque t augmente.

7. Tracer approximativement les deux graphes des composantes $x(t)$ et $y(t)$ de la solution de (3) issue du point A (question 1).





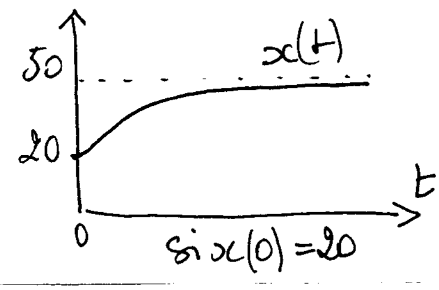
Exercice 3. : On étudie à présent la compétition entre deux populations de scorpions du désert, noirs et rouges respectivement, qui se nourissent de la même ressource et que l'on modélise par un système de type suivant :

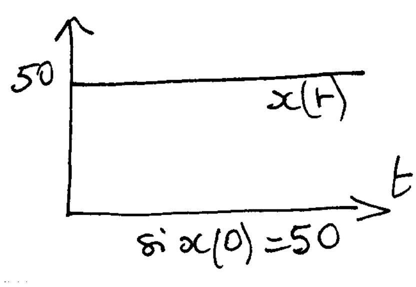
$$\left\{ \begin{array}{lcl} x'(t) & = & 0,1x(t)(3 - 0,06x(t) - 0,02y(t)) \\ y'(t) & = & 0,1y(t)(1 - 0,01x(t) - 0,02y(t)) \end{array} \right. \tag{4}$$

1. Précisez quel est le taux de croissance intrinsèque r et la capacité biotique K de la population de scorpions noirs $x(t)$ lorsque l'autre population $y(t)$ est absente. On pourra pour cela mettre l'équation sous la forme $x' = rx(1 - \frac{x}{K})$.

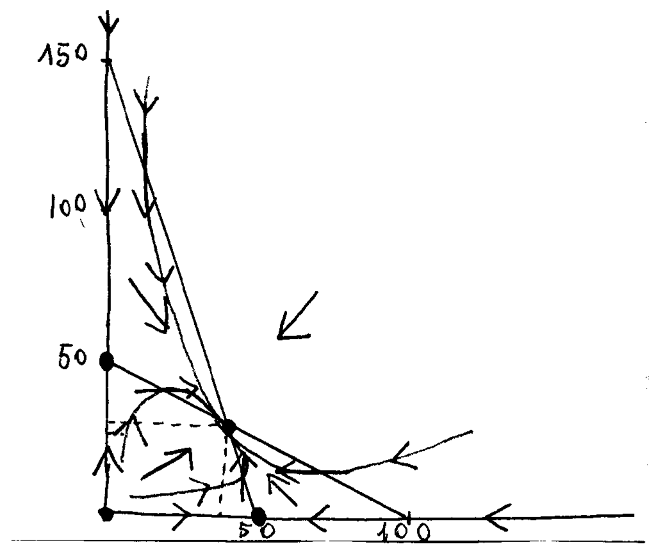
Lorsque $y = 0$, l'équation de x s'écrit $x' = 0,1x(3 - 0,06x)$
Ceci se réécrit $x' = 0,3x(1 - \frac{2x}{100}) = 0,3x(1 - \frac{x}{50})$
Donc le taux de croissance intrinsèque est $r_1 = 0,3$
et la capacité biotique est $K = 50$.

2. Préciser quelle est, dans ce cas, le comportement de la population de scorpions noirs (en esquissant l'allure du graphe de $x(t)$) lorsque l'on a $x(0) = 20$. Même question lorsque $x(0) = 50$.





3. On suppose à présent que les deux populations cohabitent. Si la population initiale des scorpions rouges est 25 et celle de scorpions noirs 60, décrire, à l'aide d'une étude qualitative, l'évolution de chacune des deux populations selon ce modèle.



isocl. vert. : $\begin{cases} x=0 \\ y=150-3x \end{cases}$

isocl. horiz. : $\begin{cases} y=0 \\ y=50-\frac{1}{2}x \end{cases}$

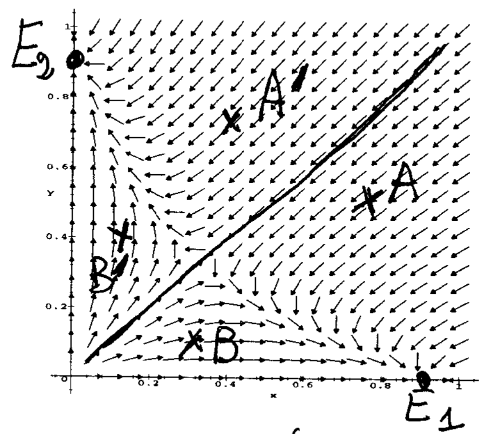
Equilibres :

$\begin{pmatrix}0\\0\end{pmatrix}$ $\begin{pmatrix}0\\50\end{pmatrix}$ $\begin{pmatrix}50\\0\end{pmatrix}$ $\begin{pmatrix}40\\30\end{pmatrix}$

L'étude qualitative montre que l'équilibre $\begin{pmatrix}40\\30\end{pmatrix}$ est attractif. Quelque soit la condition initiale $(x>0, y>0)$ la trajectoire tend vers cet équilibre. Il y a donc cohabitation des 2 populations.

Exercice 4. : Le tracé suivant repésente un autre champs de vecteurs associé à un autre système de deux espèces en compétition. Que pensez-vous de la coexistence de ces deux populations (discuter selon les conditions initiales ?

coexistence improbable: extinction de l'une des deux especes



Sur ce champs de vecteurs on remarque que les trajectoires issues de points $(x(0), y(0))$ situés ~~sous~~ sous la bissectrice (points A ou B par exemple) vont se diriger vers l'équilibre E_1 qui correspond à l'extinction de la population $y(t)$: seule $x(t)$ subsiste.

Au contraire, les trajectoires issues de points situés au dessus de la bissectrice (points A' et B' par exemple) vont se diriger vers l'équilibre E_2 qui correspond à l'extinction de la population $x(t)$ au profit de la population $y(t)$.