NOM : Date :
PRENOM : Groupe :

Mathématiques pour la Biologie (semestre 2) : Feuille-réponses du TD 4
Loi de conservation pour le modèle de Lotka-Volterra

Exercice 1. :

1. Soit $H(x,y) = 3\ln y - 0.2y + 4\ln x - 0.1x$. Calculer les deux dérivées partielles de H puis ses 4 dérivées partielles secondes.

$\frac{\partial H}{\partial x}(x,y) = \frac{4}{x} - 0{,}1 \qquad \frac{\partial H}{\partial y}(x,y) = \frac{3}{y} - 0{,}2$

$\frac{\partial^2 H}{\partial x^2}(x,y) = \frac{-4}{x^2} \qquad \frac{\partial^2 H}{\partial y \partial x}(x,y) = 0 \qquad \frac{\partial^2 H}{\partial y^2}(x,y) = \frac{-3}{y^2} \qquad \frac{\partial^2 H}{\partial x \partial y}(x,y) = 0$

2. Calculer la valeur de la fonction H puis la valeur de son vecteur gradient au point $(x = 100, y = 20)$.

$H(100,20) = 3\ln(20) - 0{,}2(20) + 4\ln(100) - 0{,}1(100) \simeq 13{,}408.$

$\text{Grad}\, H(100,20) = \left(\frac{4}{x} - 0{,}1 \quad \frac{3}{y} - 0{,}2\right)_{\substack{x=100\\ y=20}} = \left(-0{,}06 \quad 0{,}17\right)$

3. Trouver le gradient de la fonction $f(x,y) = y\ln x$. Même question pour la fonction $g(x,y) = \frac{x+y}{x-y}$.

$\text{Grad}\, f(x,y) = \left(\frac{\partial f}{\partial x}(x,y) \quad \frac{\partial f}{\partial y}(x,y)\right) = \left(\frac{y}{x} \quad \ln x\right)$

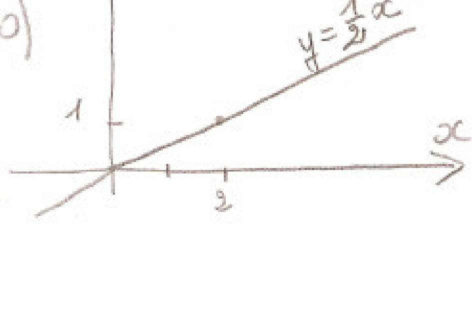
$\text{Grad}\, g(x,y) = \left(\frac{\partial g}{\partial x}(x,y) \quad \frac{\partial g}{\partial y}(x,y)\right) \underset{\left(\frac{u}{v}\right)' = \frac{u'v - uv'}{v^2}}{=} \left(\frac{(x-y)-(x+y)}{(x-y)^2} \quad \frac{(x-y)+(x+y)}{(x-y)^2}\right) = \left(\frac{-2y}{(\ )^2} \quad \frac{2x}{(\ )^2}\right)$

4. Calculer l'équation de la courbe de niveau k=2 de la fonction g puis tracer cette courbe.

La courbe de niveau 2 a pour équation $\frac{x+y}{x-y} = 2$,

Donc $x + y = 2(x-y)$, soit $2y = x$ ou $y = \frac{1}{2}x$

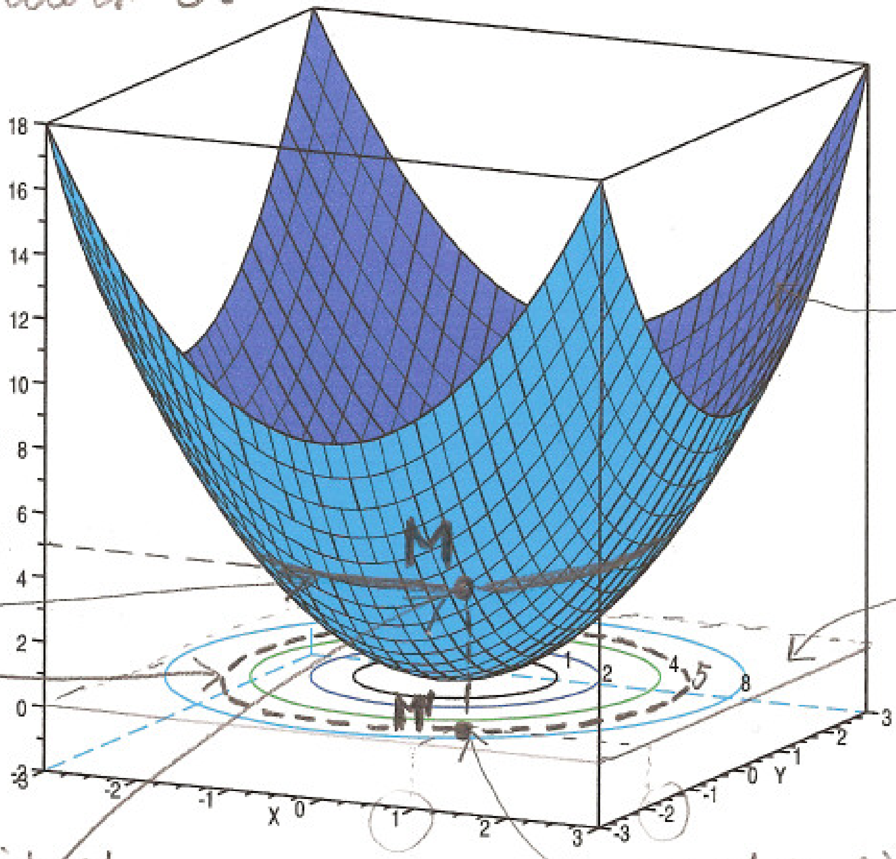
C'est donc l'équation d'une droite (mais il faut "enlever" le point $(0,0)$ car la fonction g n'est pas définie lorsque $x = y$).



Exercice 2. : Le dessin suivant représente le graphe de la fonction f de deux variables, $(x, y) \to x^2 + y^2$ puis quelques courbes de niveau de cette fonction dans le plan $z = 0$.

1. Calculer la hauteur (on dit la cote) du point M de la surface d'abscisse et d'ordonnée $M' = (1, -2)$. Marquer sur la première figure le point M et sa projection dans le plan $z = 0$ le point M'. Tracer approximativement l'ensemble des points de la surface de même niveau que M et la projection de cette courbe. Quelle est l'équation de cette projection ?

Comme la surface a pour équation $z = x^2+y^2$, le point M est de la forme (x, y, x^2+y^2). Comme $x = 1$ et $y = -2$, sa cote est 5.



graphe de $z = x^2+y^2$

ensemble des points de niveau 5

plan $z=0$

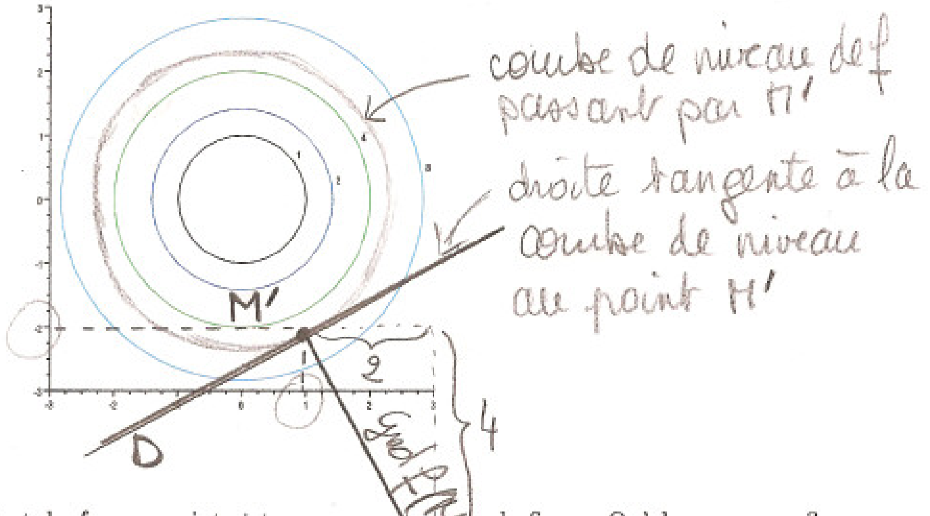
courbe de niveau 5 d'équation $\boxed{x^2+y^2=5}$

point M de coordonnés $(-1, -2, 5)$ $5 = (+1)^2+(-2)^2$.

point $M' = (1, -2)$ dans le plan $z = 0$

2. Dans le dessin suivant qui représente les courbes de niveau de f, marquer le point M' et tracer approximativement la courbe de niveau de f passant par M'. Quelle forme a cette courbe ? Tracer la droite tangente à cette courbe de niveau en ce point.

L'équation de cette courbe de niveau est $f(x,y) = k$ pour $f(x,y) = x^2+y^2$ et $k = 5$. Donc c'est $\boxed{x^2+y^2=5}$ C'est un cercle de centre $(0,0)$ et de rayon $r = \sqrt{5} \simeq 2{,}236$.



3. Calculer le vecteur gradient de f en ce point et tracer ce vecteur sur la figure. Qu'observez-vous ?

Grad $f(x,y) = (2x \quad 2y)$ donc Grad $f(1,-2) = (2, -4)$
On observe que le vecteur gradient (de coordonnées $(2\ -4)$) est perpendiculaire à la droite tangente D.

Exercice 3. : On reprend à présent l'exemple du système de Lotka Volterra étudié lors de la première séance où les proies sont des babouins et les prédateurs des guépards :

$$\begin{cases} \dfrac{dx(t)}{dt} & = & 3x(t) - 0.2x(t)y(t) \\ \dfrac{dy(t)}{dt} & = & -4y(t) + 0.1x(t)y(t) \end{cases} \qquad (1)$$

. On va étudier la loi de conservation associée à ce système donnée par $H(x, y) = 3 \ln y - 0.2y + 4 \ln x - 0.1x$.

Sur le dessin suivant sont représentés le graphe de la fonction H et quelques courbes de niveau de cette fonction dans le plan $z = 0$. $H(70, 20) \simeq 14{,}98$

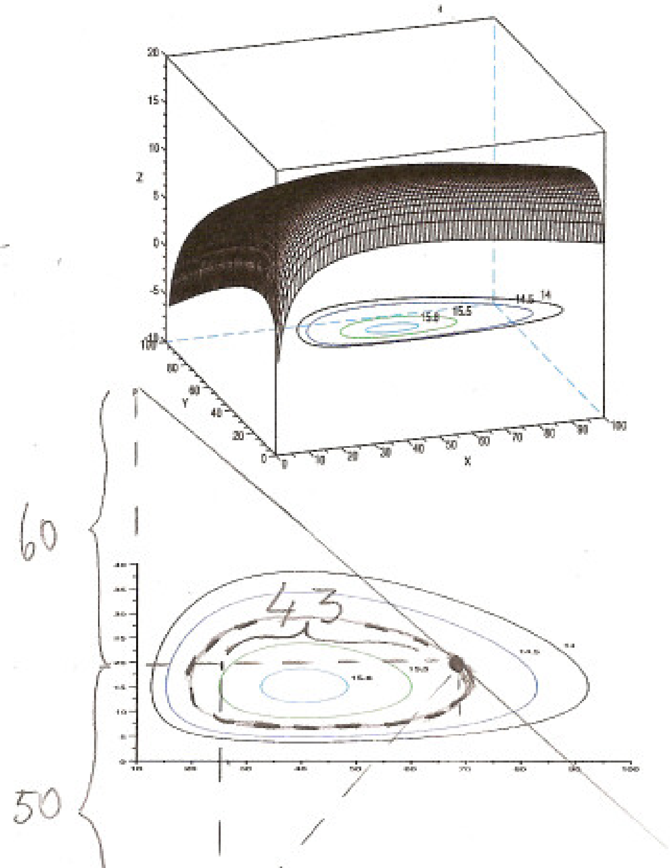
1. On considère le point M' du plan $z = 0$ de coordonnées $M' = (70, 20)$. Calculer son image M par H, placer M sur la surface et sa projection M'. Représenter approximativement la courbe de niveau de M sur la figure de droite.
2. Calculer le gradient de H au point M' et tracer ce vecteur sur la figure de droite.

On a vu que Grad $H(x,y) = \left(\frac{4}{x} - 0{,}1 \quad \frac{3}{y} - 0{,}2\right)$. Donc Grad $H(70, 20) = (-0{,}043 \quad -0{,}05)$. Pour le dessin il est plus facile de tracer 1000 fois ce vecteur (qui a la même direction) : 1000 grad $H = (-43 \quad -50)$.

3. Sachant que les courbes de niveau de H sont les graphes des solutions du système de Lotka-Voterra, calculer les coordonnées d'un vecteur tangent à cette courbe au point M' et tracer ce vecteur sur la figure de droite.

Un vecteur tangent aux solutions du système différentiel est le vecteur $\begin{pmatrix} x' \\ y' \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 3x - 0{,}2xy \\ -4y + 0{,}1xy \end{pmatrix}$

Au point $M' = \begin{pmatrix} 70 \\ 20 \end{pmatrix}$, ce vecteur sera donc $\begin{pmatrix} 3(70) - 0{,}2(70)(20) \\ -4(20) + 0{,}1(70)(20) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -70 \\ 60 \end{pmatrix}$



4. Pourquoi dit-on que la fonction H est une loi de conservation du système considéré ?

La fonction H est une loi de conservation car elle reste constante au cours du temps. Les trajectoires restent au même niveau.

5. Sachant que ce vecteur tangent est aussi un vecteur directeur de la droite tangente à cette courbe, calculer une équation de la droite tangente à cette courbe de niveau en ce point.

L'équation d'une droite de vecteur directeur $\begin{pmatrix} -70 \\ 60 \end{pmatrix}$ et passant par le point $\begin{pmatrix} 70 \\ 20 \end{pmatrix}$ est

$y = \frac{-60}{70} x + C^{ste}$ et ici, $C^{ste} = 40$.

6. Montrer qu'en tout point (x, y) le gradient de H est perpendiculaire au champ de vecteur (x', y') donné par le système dynamique de Lotka-Volterra en calculant le produit scalaire de ces deux vecteurs.

Le produit scalaire de $\begin{pmatrix} 3x - 0{,}2xy \\ -4y + 0{,}1xy \end{pmatrix}$ avec $\text{grad}\, H(x,y)$

est donné par

$(3x - 0{,}2xy)\left(\frac{4}{x} - 0{,}1\right) + (-4y + 0{,}1xy)\left(\frac{3}{y} - 0{,}2\right) =$

$= \cancel{12} - \cancel{0{,}3x} - \cancel{0{,}8y} + \cancel{0{,}02xy} - \cancel{12} + \cancel{0{,}3x} + \cancel{0{,}8y} - \cancel{0{,}02xy}$

$= 0$