Corrigé

NOM : Date :
PRENOM : Groupe :

Mathématiques pour la Biologie (semestre 2) : Feuille-réponses du TD 5
La méthode de Euler pour l'approximation d'une solution d'une équation differentielle

Principe de la méthode de Euler

Etant donné une équation differentielle

$$\frac{dx}{dt} = f(t, x), \tag{1}$$

on veut approximer, pour une valeur initiale x_0, une fonction $x(t)$ qui verifie l'équation et pour laquelle on a $x(0) = x_0$. Pour faire cela, on choisit quelques points t_i pour lesquels on calcule des approximations x_i correspondants. On espère que $x_i \approx x(t_i)$. A partir de la valeur x_0 on peut calculer $\frac{dx}{dt}(0) = x'(0)$ à l'aide de l'équation (1) en calculant $f(0, x_0)$. Comme valeur approximative x_1 au temps $t_1 = 0 + t_1$ on choisit de prendre

$$x_0 + dX = x_0 + x'(0) \cdot t_1. \tag{2}$$

En général, la valeur x_{i+1} est déterminée en ajoutant $\Delta x_i = (t_{i+1} - t_i) \cdot f(t_i, x_i)$ à son predecesseur, la valeur x_i :

$$x_{i+1} = x_i + \Delta x_i = x_i + (t_{i+1} - t_i) \cdot f(t_i, x_i). \tag{3}$$

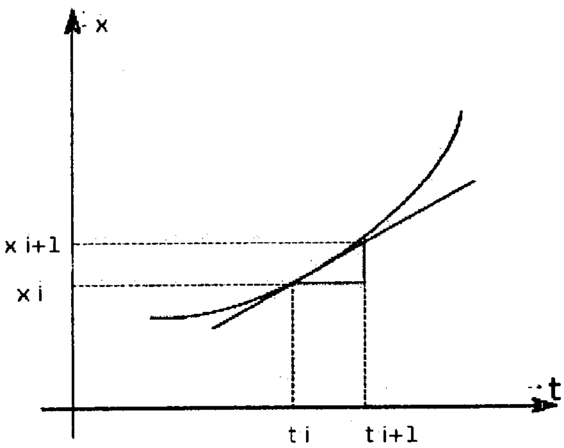


FIG. 1 – Pour approximer la courbe, on suit la droite tangente à cette courbe. La tangente est donnée par le point x_i et le coefficient directeur $x'(t_i) = f(t_i, x(t_i))$.

Cette procedure est justifiée par les approximations suivants. La derivée $x'(t)$ peut être vue comme le quotient de deux differences (pour Δt petit) :

$$\frac{\Delta x}{\Delta t} = \frac{x_{i+1} - x_i}{t_{i+1} - t_i} \approx x'(t_i). \tag{4}$$

En isolant x_{i+1} on obtient

$$x_{i+1} = x_i + (t_{i+1} - t_i) \cdot x'(t_i), \tag{5}$$

ou la derivée inconnue $x'(t)$ de la fonction $x(t)$ - qu'on ne connait pas non plus - est remplacée par $f(t, x)$ correspondant à (1). Cela donne la spécification (3).

Exemple

Considerons l'équation

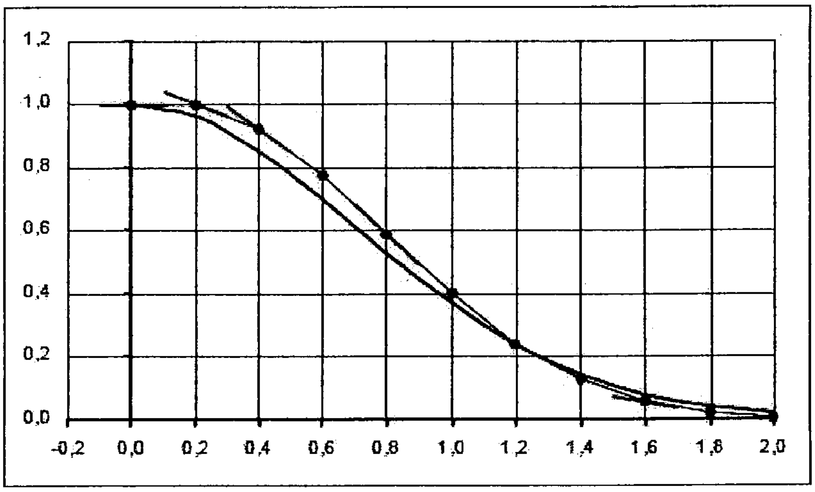
$$\frac{dx}{dt} = -2t \cdot x(t), \qquad x(0) = 1 \tag{6}$$

La solution analytique est $x(t) = e^{-t^2}$.

Exercice : Compléter le tableau suivant :

i	t_i	$x(t_i) = e^{-(t_i)^2}$	x_i	$\Delta x_i = (t_{i+1} - t_i) \cdot (-2)t_i \cdot x_i$	$x_{i+1} = x_i + \Delta x_i$
0	0	1	1	$(0.2 - 0.0) \cdot (-2) \cdot 0 \cdot 1 = 0$	$1 + 0 = 1$
1	0.2	0,96	1	$(0.4 - 0.2) \cdot (-2) \cdot 0.2 \cdot 1 = -0.08$	$1 + (-0.08) = 0.92$
2	0.4	0,852	0.92	-0,147	0,772
3	0.6	0,697	0,772	-0,185	0,587
4	0.8	0,527	0,587	-0,187	0,399
5	1.0	0,367	0,399	-0,159	0,239

Exercice : Dessiner les valeurs x_i et $x(t_i)$ dans un système de coordonnées t - x.



Méthode d'Euler en deux variables

On considère maintenant le système

$$\begin{cases} x'(t) &= 0.08x(t) - 0.004x(t)y(t) \\ y'(t) &= -0.06y(t) + 0.002x(t)y(t) \end{cases}$$

avec une population initiale $x(0) = 40$ lapins et $y(0) = 20$ renards. On souhaite étudier l'évolution des deux populations sur une période de 10 ans. Si on introduit les vecteurs

$$p(t) = \begin{pmatrix} x(t) \\ y(t) \end{pmatrix}, \qquad f(t,p) = \begin{pmatrix} 0.08x(t) - 0.004x(t)y(t) \\ -0.06y(t) + 0.002x(t)y(t) \end{pmatrix},$$

on peut écrire le système (7) sous la forme

$$p'(t) = f(t,p), \qquad p(0) = \begin{pmatrix} x(0) \\ y(0) \end{pmatrix}.$$

La méthode d'Euler progressive s'écrit

$$\frac{u_{i+1} - u_i}{t_{i+1} - t_i} = f(t_i, u_i) \qquad \text{ou} \qquad u_{i+1} = u_i + (t_{i+1} - t_i) \cdot f(t_i, u_i) \tag{7}$$

ce qui équivaut au schéma (on écrit les composants de $u = (u_1, u_2)$ séparement)

$$\begin{cases} \frac{(u_{i+1})_1 - (u_i)_1}{t_{i+1} - t_i} & = 0.08(u_i)_1 - 0.004(u_i)_1(u_i)_2 \\ \frac{(u_{i+1})_2 - (u_i)_2}{t_{i+1} - t_i} & = -0.06(u_i)_2 + 0.002(u_i)_1(u_i)_2 \\ (u_0)_1 = x(0), \quad (u_0)_2 = y(0). \end{cases} \tag{8}$$

ou, mieux lisible, en utilisant la transformation dans (7) :

$$\begin{cases} (u_{i+1})_1 = (u_i)_1 + (t_{i+1} - t_i) \cdot \big(0.08(u_i)_1 - 0.004(u_i)_1(u_i)_2\big) \\ (u_{i+1})_2 = (u_i)_2 + (t_{i+1} - t_i) \cdot \big(-0.06(u_i)_2 + 0.002(u_i)_1(u_i)_2\big) \\ (u_0)_1 = x(0), \quad (u_0)_2 = y(0). \end{cases} \tag{9}$$

Ensuite on peut résoudre le système pas à pas. En utilisant les notations comme en une dimension,

$$\Delta(u_i)_1 = (t_{i+1} - t_i) \cdot \big(0.08(u_i)_1 - 0.004(u_i)_1(u_i)_2\big),$$
$$\Delta(u_i)_2 = (t_{i+1} - t_i) \cdot \big(-0.06(u_i)_2 + 0.002(u_i)_1(u_i)_2\big),$$

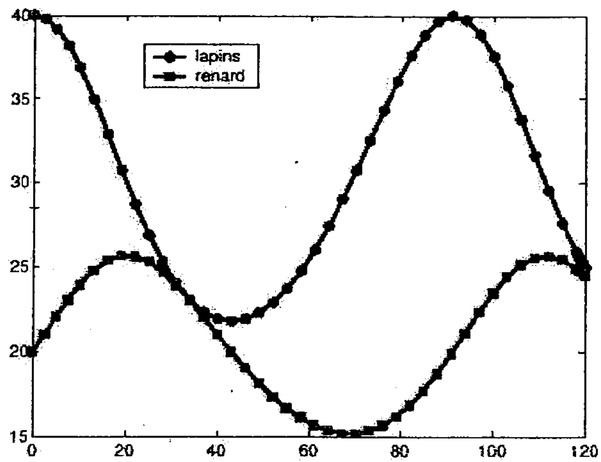
on calcule maintenant des valeurs approximatives pour certains moments t_i.

Exercice : Compléter le tableau suivant :

i	t_i	$(u_i)_1$	$(u_i)_2$	$\Delta(u_i)_1$	$(u_{i+1})_1 = (u_i)_1 + \Delta(u_i)_1$	$\Delta(u_i)_2$	$(u_{i+1})_2 = (u_i)_2 + \Delta(u_i)_2$
0	0	40	20	0	40 + 0 = 40	4	20 + 4 = 24
1	10	40	24	-6,4	40 - 6,4 = 33,6	4,8	24 + 4,8 = 28,8
2	20	33,6	28,8	-11,8	33,6 - 11,8 = 21,8	2,1	28,8 + 2,1 = 30,9
3	30	21,8	30,9	-9,5	21,8 - 9,5 = 12,3	-5,1	30,9 - 5,1 = 25,8
4	40	12,3	25,8	-2,9	12,3 - 2,9 = 9,4	-9,1	25,8 - 9,1 = 16,7
5	50	9,4	16,7	1,2	9,4 + 1,2 = 10,6	-6,9	16,7 - 6,9 = 9,8
6	60	10,6	9,8				

x y

Exercice :
- Dessiner approximativement le developpement des populations comme dans la figure suivant.
- Comparer ta figure avec celle en bas. Quelle est plus précise ? Pourquoi est-elle plus précise ?
- Dessiner la figure correspondante dans le plan x - y.



les courbes les plus précises sont celles ci dessus car le pas de temps est plus petit, par suite nombre de points est plus grand.