NOM :
PRENOM : Corrigé

Date :
Groupe :

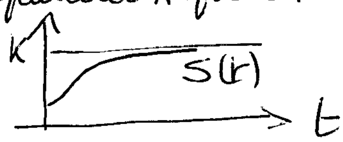
Mathématiques pour la Biologie (semestre 2) : Feuille-réponses du TD 6
Un modèle d'épidémie

En 1979, une épidémie de rage, en provenance d'Europe orientale, est arrivée en France, principalement par l'Est. Les renards étaient l'un des vecteurs de la rage. En notant S les individus sains et I les individus infectés on peut proposer comme modèle de transmission de la rage, tenant compte de la contamination des renards sains par des renards malades le modèle suivant (r, K, β, u étant des constantes positives) :

$$\begin{cases} S'(t) &= r(S(t)+I(t))\left(1-\frac{S(t)}{K}\right) - \beta S(t)I(t) \\ I'(t) &= \beta S(t)I(t) - uI(t) \end{cases} \tag{1}$$

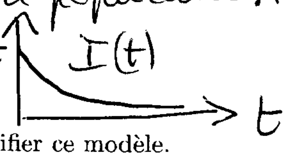
1. Préciser quelle est, selon ce modèle, la dynamique de la population de renards lorsqu'il n'y a pas d'individus infestés.

Lorsque $I(t)=0$, on a $S'(t) = r\,S(t)\left(1-\frac{S(t)}{K}\right)$. On reconnait une dynamique logistique : la population présente donc une croissance amortie et tend vers K.



2. Même question s'il n'y a que des individus infestés (et plus aucun individu sains).

Lorsque $S(t)=0$, $I'(t) = -u\,I(t)$. On reconnait une dynamique malthusienne : la population va décroître exponentiellement vers 0 (extinction) : $I(t)=I(0)e^{-ut}$



3. Indiquer ce que représente chacun des paramètres r, K, β et u et justifier ce modèle.

r est le taux de croissance intrinsèque et K la capacité biotique de la population saine.
u est le taux de mortalité des individus infectés.
β est le coefficient d'interaction (i.e. d'infection) entre S et I.

4. Pour étudier le système plus facilement, réécrire le système en remplaçant les coordonnées S et I par x et y et en supposant que $r=1$, $K=2$, $\beta=1$, et $u=1$.

$$\begin{cases} x' = (x+y)\left(1-\frac{x}{2}\right) - xy \\ y' = xy - y \end{cases}$$

5. Calculer l'isocline $y'=0$ (dite *horizontale*) et en déduire les coordonnées des trois points d'équilibres du système.

L'isocline $y'=0$ a pour équation $xy-y=0$. C'est donc la réunion des deux droites $y=0$ et $x=1$!
Pour calculer les équilibres, on pose

$$\begin{cases} x'=0 \\ y'=0 \end{cases} \iff \begin{cases} \frac{1}{2}(1+y)-y=0 \\ x=1 \end{cases} \text{ ou } \begin{cases} x\left(1-\frac{x}{2}\right)=0 \\ y=0 \end{cases}$$

$$\iff \begin{cases} y=1 \\ x=1 \end{cases} \text{ ou } \begin{cases} x=0 \\ y=0 \end{cases} \text{ ou } \begin{cases} x=2 \\ y=0 \end{cases}$$

6. Calculer la matrice jacobienne $A(x,y)$ du système et en déduire les systèmes linéarisés au voisinage des trois points d'équilibre.

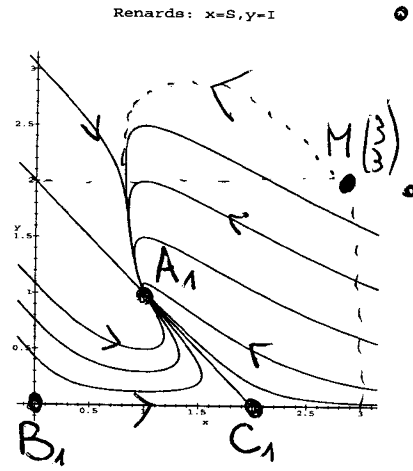
$$A(x,y) = \begin{pmatrix} \frac{\partial f}{\partial x}(x,y) & \frac{\partial f}{\partial y}(x,y) \\ \frac{\partial g}{\partial x}(x,y) & \frac{\partial g}{\partial y}(x,y) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1-x-\frac{3y}{2} & 1-\frac{3}{2}x \\ y & x-1 \end{pmatrix}$$

au point d'équilibre $\begin{pmatrix}1\\1\end{pmatrix}$, le linéarisé est $\begin{pmatrix}x'\\y'\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}-\frac{3}{2} & -\frac{1}{2}\\ 1 & 0\end{pmatrix}\begin{pmatrix}x\\y\end{pmatrix}$

au point d'équilibre $\begin{pmatrix}0\\0\end{pmatrix}$, le linéarisé est $\begin{pmatrix}x'\\y'\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}1 & 1\\ 0 & -1\end{pmatrix}\begin{pmatrix}x\\y\end{pmatrix}$

au point d'équilibre $\begin{pmatrix}2\\0\end{pmatrix}$, le linéarisé est $\begin{pmatrix}x'\\y'\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}-1 & -2\\ 0 & 1\end{pmatrix}\begin{pmatrix}x\\y\end{pmatrix}$

7. Déduire de la question précédente la nature des points d'équilibre. On pourra vérifier si les résultats obtenus sont compatibles avec le tracé des trajectoires ci-dessous :



- Au point $A_1(1,1)$, $A = \begin{pmatrix}-\frac{3}{2} & -\frac{1}{2}\\ 1 & 0\end{pmatrix}$ donc $tr(A) = -\frac{3}{2}$, $det(A) = \frac{1}{2}$

On a donc un noeud stable

- Au point $B_1 = \begin{pmatrix}0\\0\end{pmatrix}$, $A = \begin{pmatrix}1 & 1\\ 0 & -1\end{pmatrix}$ donc $tr(A) = 0$, $det(A) = -1$

On a donc un col (ou point selle)

- Au point $C_1 = \begin{pmatrix}2\\0\end{pmatrix}$, $A = \begin{pmatrix}-1 & -2\\ 0 & 1\end{pmatrix}$ donc $tr(A) = 0$, $det(A) = -1$

Comme B_1, C_1 est donc un col.

Sur le dessin, on vérifie que A_1 attire toutes les solutions (sans mouvement tournant, donc c'est bien un noeud et non un foyer et B_1 et C_1 sont de type col

On

8. En étudiant la dynamique de l'épidémie selon le nombre d'individus infestés à l'instant initiale, pensez-vous que, selon ce modèle, l'épidémie restera maitrisée ?

Si le nombre d'individus S et I correspond au point M (3,3) la trajectoire se dirige vers la gauche en montant puis redescendant vers l'équilibre (1,1). Le nombre d'individu sain décroit jusqu'à l'équilibre (inférieur à sa capacité biotique) et le nombre d'individus infestés va commencer par croître pour décroître finalement vers une valeur limite : l'épidémie est donc maitrisée.