NOM : Date : .
PRENOM : Groupe : .

Mathématiques pour la Biologie (semestre 2) : Feuille-réponses du TD 1
Le modèle de Lotka-Volterra

On répondra aux questions posées aussi clairement que possible dans les espaces prévus et on remettra cette *feuille-réponses* en fin de séance à l'enseignant chargé du Cours/TD.

L'étude de l'évolution en interaction d'une population de babouins (les proies) et d'une population de guépards (les prédateurs) a conduit au modèle dynamique de Lotka-Volterra suivant :

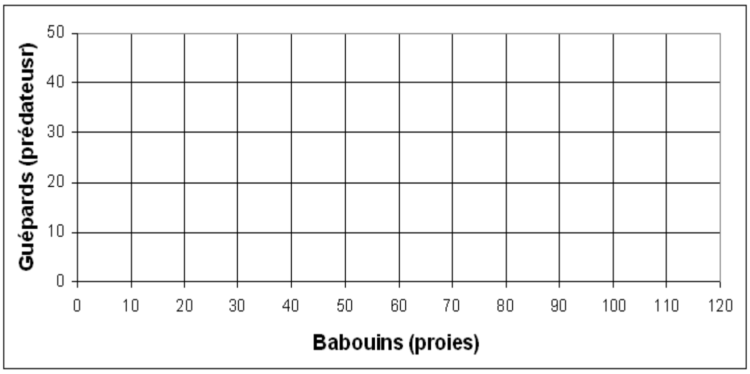
$$\left\{\begin{array}{lcl} x' & = & 3x - 0,2xy \\ y' & = & 0,1xy - 4y \end{array}\right. \tag{1}$$

où $x(t)$ représente le nombre de babouins et y(t) le nombre de guépards à l'instant t. On suppose qu'à l'instant initial $t = 0$, il y a 100 babouins et 20 guépards (donc $x(0) = 100$ et $y(0) = 20$) et on s'interroge pour savoir comment, lorsque t augmente, les effectifs de ces deux populations vont évoluer.

1. On a calculé une solution approchée de ce système d'équations différentielles et on a trouvé les valeurs suivantes :

t	0	0,25	0,5	1	1,5	1,75	2
$x(t)$	100	37	12	13	40	73	107
$y(t)$	20	44	27	6	3	4	14

On désigne par A_0 le point de coordonnées $(x\ ;y) = (100\ ;20)$, par A_1 celui de coordonnées $(x\ ;y) = (37\ ;44)$, et ainsi de suite jusqu'à A_6. Placer les 7 points sur la figure ci dessous puis en deduire l'allure de la trajectoire du système (1) issue du point A_0.

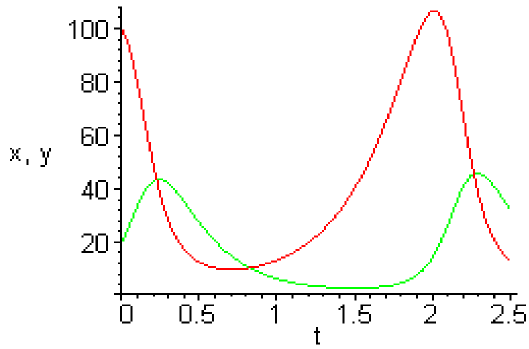


2. On sait que les deux fonctions $x(t)$ et $y(t)$ sont des fonctions périodiques de période T. Quelle est la valeur approximative de T ? Les populations de babouins et de guépards oscillent donc, selon ce modèle, entre deux valeurs minimale et maximale. Déterminer approximativement ces deux valeurs extrêmes pour chacune des deux populations.

3. En vous servant du dessin précédent, reprendre la question précédente mais en supposant cette fois qu'il y a au départ 60 babouins et 30 guépards.

4. Que se passe-t-il si $x(0) = 40$ et $y(0) = 15$? Expliquez.

5. On a représenté sur la figure suivante les graphes des deux fonctions $x(t)$ et $y(t)$ de la première question sur un intervalle de temps légèrement plus long que leur période. Ces deux graphes se coupent trois fois sur cet intervalle de temps, aux instants t_1, t_2 et t_3. Expliquer la dynamique de chacune des deux populations de babouins et de guépards durant chacun des trois intervalles $[0, t_1]$, $[t_1, t_2]$ et $[t_2, t_3]$ successivement.



6. Selon ce modèle, aucune des deux populations ne s'éteint mais l'une d'elle frôle l'extinction. Il y a donc un risque sérieux pour elle si, dans la réalité, sa dynamique s'écarte légèrement du modèle théorique. Quelle mesure préconiseriez-vous pour éviter ce risque ?

7. Calculer la fonction $x(t)$ si l'on suppose $y(t) = 0$ (dynamique des babouins en l'absence de guépards) dans le cas où $x(0) = 100$. De même calculer la fonction $y(t)$ si l'on suppose $x(t) = 0$ (dynamique des guépards en l'absence de babouins) dans le cas où $y(0) = 20$.