

NOM :
PRENOM :

Date :
Groupe :

Mathématiques pour la Biologie (semestre 2) : Feuille-réponses du TD 5
La méthode de Euler pour l'approximation d'une solution d'une équation différentielle

Principe de la méthode de Euler

Etant donné une équation différentielle

$$\frac{dx}{dt} = f(t, x), \quad (1)$$

on veut approximer, pour une valeur initiale x_0 , une fonction $x(t)$ qui vérifie l'équation et pour laquelle on a $x(0) = x_0$. Pour faire cela, on choisit quelques points t_i pour lesquels on calcule des approximations x_i correspondants. On espère que $x_i \approx x(t_i)$. A partir de la valeur x_0 on peut calculer $\frac{dx}{dt}(0) = x'(0)$ à l'aide de l'équation (1) en calculant $f(0, x_0)$. Comme valeur approximative x_1 au temps $t_1 = 0 + t_1$ on choisit de prendre

$$x_0 + dX = x_0 + x'(0) \cdot t_1. \quad (2)$$

En général, la valeur x_{i+1} est déterminée en ajoutant $\Delta x_i = (t_{i+1} - t_i) \cdot f(t_i, x_i)$ à son prédécesseur, la valeur x_i :

$$x_{i+1} = x_i + \Delta x_i = x_i + (t_{i+1} - t_i) \cdot f(t_i, x_i). \quad (3)$$

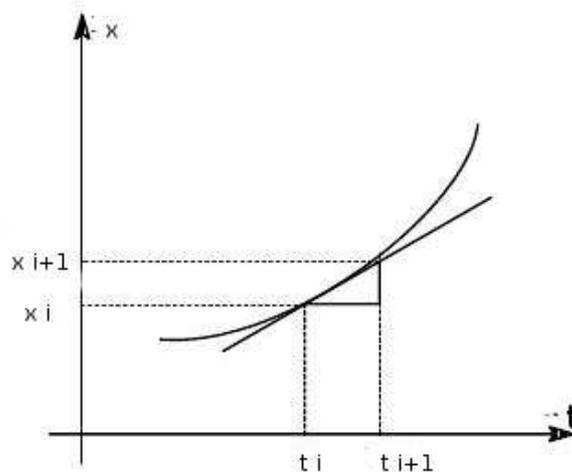


FIG. 1 – Pour approximer la courbe, on suit la droite tangente à cette courbe. La tangente est donnée par le point x_i et le coefficient directeur $x'(t_i) = f(t_i, x(t_i))$.

Cette procédure est justifiée par les approximations suivants. La dérivée $x'(t)$ peut être vue comme le quotient de deux différences (pour Δt petit) :

$$\frac{\Delta x}{\Delta t} = \frac{x_{i+1} - x_i}{t_{i+1} - t_i} \approx x'(t_i). \quad (4)$$

En isolant x_{i+1} on obtient

$$x_{i+1} = x_i + (t_{i+1} - t_i) \cdot x'(t_i), \quad (5)$$

ou la dérivée inconnue $x'(t)$ de la fonction $x(t)$ - qu'on ne connaît pas non plus - est remplacée par $f(t, x)$ correspondant à (1). Cela donne la spécification (3).

Exemple

Considérons l'équation

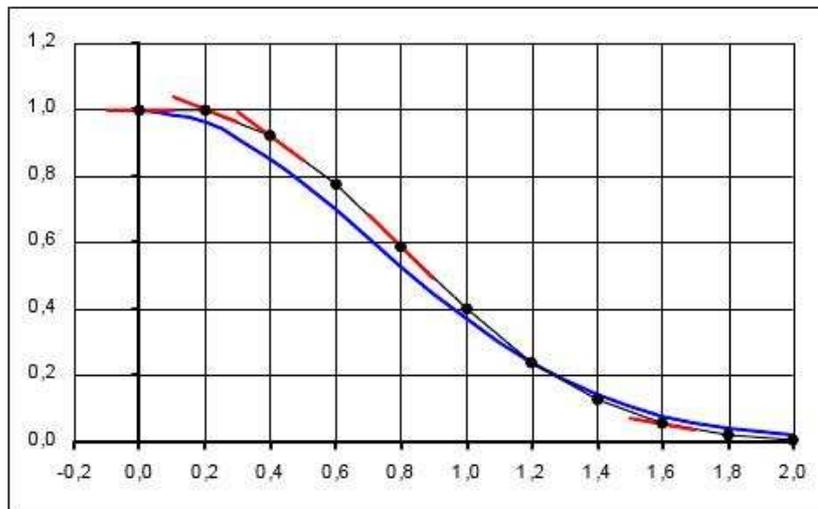
$$\frac{dx}{dt} = -2t \cdot x(t), \quad x(0) = 1 \tag{6}$$

La solution analytique est $x(t) = e^{-t^2}$.

Exercice : Compléter le tableau suivant :

i	t_i	$x(t_i) = e^{-(t_i)^2}$	x_i	$\Delta x_i = (t_{i+1} - t_i) \cdot (-2)t_i \cdot x_i$	$x_{i+1} = x_i + \Delta x_i$
0	0	1	1	$(0.2 - 0.0) \cdot (-2) \cdot 0 \cdot 1 = 0$	$1 + 0 = 1$
1	0.2		1	$(0.4 - 0.2) \cdot (-2) \cdot 0.2 \cdot 1 = -0.08$	$1 + (-0.08) = 0.92$
2	0.4		0.92		
3	0.6				
4	0.8				
5	1.0				

Exercice : Dessiner les valeurs x_i et $x(t_i)$ dans un système de coordonnées $t - x$.



Méthode d'Euler en deux variables

On considère maintenant le système

$$\begin{cases} x'(t) = 0.08x(t) - 0.004x(t)y(t) \\ y'(t) = -0.06y(t) + 0.002x(t)y(t) \end{cases}$$

avec une population initiale $x(0) = 40$ lapins et $y(0) = 20$ renards. On souhaite étudier l'évolution des deux populations sur une période de 10 ans. Si on introduit les vecteurs

$$p(t) = \begin{pmatrix} x(t) \\ y(t) \end{pmatrix}, \quad f(t, p) = \begin{pmatrix} 0.08x(t) - 0.004x(t)y(t) \\ -0.06y(t) + 0.002x(t)y(t) \end{pmatrix},$$

on peut écrire le système (7) sous la forme

$$p'(t) = f(t, p), \quad p(0) = \begin{pmatrix} x(0) \\ y(0) \end{pmatrix}.$$

La méthode d'Euler progressive s'écrit

$$\frac{u_{i+1} - u_i}{t_{i+1} - t_i} = f(t_i, u_i) \quad \text{ou} \quad u_{i+1} = u_i + (t_{i+1} - t_i) \cdot f(t_i, u_i) \tag{7}$$

ce qui équivaut au schéma (on écrit les composants de $u = (u_1, u_2)$ séparément)

$$\begin{cases} \frac{(u_{i+1})_1 - (u_i)_1}{t_{i+1} - t_i} = 0.08(u_i)_1 - 0.004(u_i)_1(u_i)_2 \\ \frac{(u_{i+1})_2 - (u_i)_2}{t_{i+1} - t_i} = -0.06(u_i)_2 + 0.002(u_i)_1(u_i)_2 \\ (u_0)_1 = x(0), \quad (u_0)_2 = y(0). \end{cases} \quad (8)$$

ou, mieux lisible, en utilisant la transformation dans (7) :

$$\begin{cases} (u_{i+1})_1 = (u_i)_1 + (t_{i+1} - t_i) \cdot (0.08(u_i)_1 - 0.004(u_i)_1(u_i)_2) \\ (u_{i+1})_2 = (u_i)_2 + (t_{i+1} - t_i) \cdot (-0.06(u_i)_2 + 0.002(u_i)_1(u_i)_2) \\ (u_0)_1 = x(0), \quad (u_0)_2 = y(0). \end{cases} \quad (9)$$

Ensuite on peut résoudre le système pas à pas. En utilisant les notations comme en une dimension,

$$\begin{aligned} \Delta(u_i)_1 &= (t_{i+1} - t_i) \cdot (0.08(u_i)_1 - 0.004(u_i)_1(u_i)_2), \\ \Delta(u_i)_2 &= (t_{i+1} - t_i) \cdot (-0.06(u_i)_2 + 0.002(u_i)_1(u_i)_2), \end{aligned}$$

on calcule maintenant des valeurs approximatives pour certains moments t_i .

Exercice : Compléter le tableau suivant :

i	t_i	$(u_i)_1$	$(u_i)_2$	$\Delta(u_i)_1$	$(u_{i+1})_1 = (u_i)_1 + \Delta(u_i)_1$	$\Delta(u_i)_2$	$(u_{i+1})_2 = (u_i)_2 + \Delta(u_i)_2$
0	0	40	20				
1	10						
2	20						
3	30						
4	40						
5	50						
6	60						

Exercice :

- Dessiner approximativement le développement des populations comme dans la figure suivant.
- Comparer ta figure avec celle en bas. Quelle est plus précise ? Pourquoi est-elle plus précise ?
- Dessiner la figure correspondante dans le plan $x - y$.

