NOM : Date : .
PRENOM : Groupe : .

Mathématiques Appliquées à la Biologie : Feuille-réponses du TD 1
Introduction aux chaines de Markov

On répondra aux questions posées aussi clairement que possible dans les espaces prévus et on remettra cette *feuille-réponses* en fin de séance à l'enseignant chargé du Cours/TD.

Exercice 1. : On reprend la chaine de Markov de l'exemple introductif pour lequel $S = \{h, a, f\}$ et

on demande

$$\mathbb{P} = \begin{array}{c} \begin{array}{ccc} h & a & f \end{array} \\ \begin{pmatrix} 0,5 & 0,45 & 0,05 \\ \boxed{0,1} & \boxed{0,5} & \boxed{0,4} \\ 0 & 0,1 & 0,9 \end{pmatrix} \end{array} \begin{array}{c} h \\ a \\ f \end{array}$$

on sait que.

1. Trouver les probabilités $P(X_1 = a/X_0 = h)$ et $P(X_1 = a/X_0 = a)$.

Il suffit de lire la valeur dans la matrice stochastique $\mathbb{P}$
On trouve $\mathbb{P}(X_1 = a / X_0 = h) = 0,45$
$\mathbb{P}(X_1 = a / X_0 = a) = \boxed{0,5}$

2. Interpréter le fait que $P(X_1 = h/X_0 = f) = 0$.

Ceci signifie qu'une forêt qui brûle ne devient jamais de l'herbe mais est remplacée par des arbustes

3. Selon ce modèle si la chaine X_t est en un point dans l'état d'arbuste, est-il plus probable qu'elle évolue vers l'état de forêt ou vers celui d'herbe ?

On voit que
$\mathbb{P}(X_1 = f / X_0 = a) = \boxed{0,4} > \boxed{0,1} = \mathbb{P}(X_1 = h / X_0 = a)$

4. Calculer la probabilité des trajectoires suivantes (h, a, f, h), (h, a, f, a), (a, a, a).

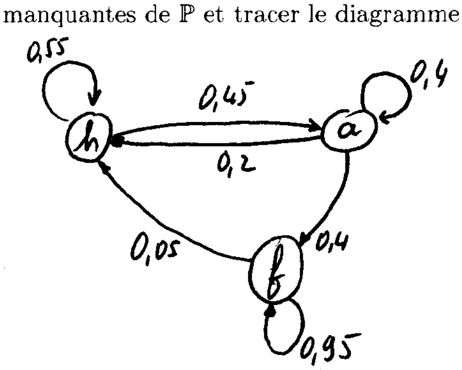
$\mathbb{P}(\text{"}(h,a,f,h)\text{"}) = \pi_0(h)\mathbb{P}(X_1 = a/X_0 = h)\cdot\mathbb{P}(X_2 = f/X_1 = a)\cdot\mathbb{P}(X_3 = h, X_2 = f) = 0,45\cdot 0,4\cdot 0\cdot\pi_0(h) = 0$
de même
$\mathbb{P}(\text{"}h,a,f,a\text{"}) = \pi_0(h)\, 0,45\cdot 0,4\cdot 0,1 = 0,0180\,\pi_0(h)$
$\mathbb{P}(\text{"}a,a,a\text{"}) = \pi_0(a)\cdot 0,5\cdot 0,5 = 0,25\,\pi_0(a)$

5. Sans changer l'espace d'états S, on suppose cette fois que la matrice de transition $\mathbb{P}$ vaut

$$\begin{array}{c|c} & \begin{array}{ccc} h & a & f \end{array} \\ \begin{array}{c} h \\ a \\ f \end{array} & \begin{pmatrix} 0,55 & 0,45 & 0 \\ 0,2 & 0,4 & 0,4 \\ 0,05 & 0 & 0,95 \end{pmatrix} \end{array}$$

la somme des lignes doit être égale à 1

Compléter les valeurs manquantes de $\mathbb{P}$ et tracer le diagramme en points et flèche associé.



Exercice 2. : On suppose[1] que l'on s'intéresse à une forêt composée de deux espèces d'arbres, E1 et E2. Lorsqu'un arbre meurt, un nouveau grandit à sa place mais il peut être de l'une ou l'autre des deux espèces. Ceux de la première espèce ayant une longue durée de vie, on suppose que 1% d'entre eux meurt chaque année alors que ce taux est de 5% pour la deuxième espèce. Mais ces derniers grandissant plus rapidement réussiront plus souvent à occuper une place laissée vacante : on suppose que 75% des places vacantes sont prises par un arbre de la deuxième espèce contre seulement 25% pour un arbre de la première espèce.

IV

1. Expliquer comment l'on peut modéliser la dynamique de cette foret par une chaîne de Markov $(X_t)_{t\geq 0}$ à deux états $E1$ et $E2$ et justifier la formule suivante :

proba qu'un arbre E1 se survive à lui même — proba qu'il meure — proba qu'un arbre E_1 occupe la place laissée vacante

$$P(X_{t+1} = E_1/X_t = E_1) = 0,99 + 0,01 \cdot 0,25 = 0,9925.$$

(formule des probas totales)

de même $\mathbb{P}(X_{t+1} = E_2 / X_t = E_1) = 0{,}01 \cdot 0{,}75 = 0{,}0075$ (il faut que l'arbre E_1 meure !)

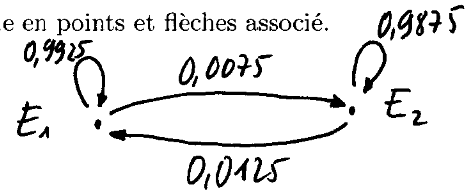
$\mathbb{P}(X_{t+1} = E_1 / X_t = E_2) = 0{,}05 \cdot 0{,}25 = 0{,}0125$

$\mathbb{P}(X_{t+1} = E_2 / X_t = E_2) = 0{,}95 + 0{,}05 \cdot 0{,}75 = 0{,}95 + 0{,}0375 = 0{,}9875$

2. En déduire la matrice de transition $\mathbb{P}$ de la chaîne de Markov .

$$\begin{array}{cc} E_1 & E_2 \end{array}$$
$$\begin{pmatrix} 0{,}9925 & 0{,}0075 \\ 0{,}0125 & 0{,}9875 \end{pmatrix} \begin{array}{c} E_1 \\ E_2 \end{array}$$

3. Tracer le diagramme en points et flèches associé.



4. Si l'on commence avec une population de 10 arbres de l'espèce $E1$ et 990 de l'espèce $E2$, combien aura-t-on d'arbres de l'espèce $E1$ après une étape, après deux étapes?

La distribution initiale est $\pi_0 = (\pi_0(E1), \pi_0(E2)) = (\frac{10}{1000}, \frac{990}{1000}) = (0{,}01 \;\; 0{,}99)$. La proportion d'arbre E1 devient $\pi_1(E_1) = \pi_0(E)\,\mathbb{P}(X_1 = E_1 \mid X_0 = E_1) + \pi_0(E_2)\,\mathbb{P}(X_1 = E_1 / X_0 = E_2) = 0{,}01 \cdot 0{,}9925 + 0{,}99 \cdot 0{,}0125 = 0{,}0223$. Donc sur 1000 arbres, il y aura "22,3" arbres E1, soit environ 22 arbres E1. De même, après deux étapes, $\pi_2(E_1) = \pi_1(E_1) P(X_2 = E_1 \mid X_1 = E_1) + \pi_1(E_2) P(X_2 = E_1 \mid X_1 = E_2) = 0{,}0233 \cdot 0{,}9925 + (1 - 0{,}0223) \cdot 0{,}0125 = 0{,}034354$, soient 34 arbres E_1

5. Calculer l'image de la distribution $\pi_0 = (0,01 \;\; 0,99)$ par cette chaîne de Markov.

$$(0{,}01 \quad 0{,}99) \begin{pmatrix} 0{,}9925 & 0{,}0075 \\ 0{,}0125 & 0{,}9875 \end{pmatrix} = (0{,}01 \cdot 0{,}9925 + 0{,}99 \cdot 0{,}0125 \,;\; 0{,}01 \cdot 0{,}0075 + 0{,}99 \cdot 0{,}9875)$$
$$= (0{,}0223 \quad 0{,}9777)$$

6. Reprendre les deux questions précédentes si l'on suppose qu'il y a au départ une proportion de cinq arbres de la première espèce contre trois de la seconde.

La distribution initiale est $(\frac{5}{8} \;\; \frac{3}{8}) = (0{,}625 \;\; 0{,}375)$. Après une étape on a alors

$$1000 \cdot (0{,}625 \;\; 0{,}375) \begin{pmatrix} 0{,}9925 & \cancel{0{,}0075} \\ 0{,}0125 & \cancel{0{,}9875} \end{pmatrix} = (625 \cdot 0{,}9925 + 375 \cdot 0{,}0125) = 625$$

On voit donc qu'après une étape le nombre d'arbres de l'espèce E_1 est inchangé (625) et il en est donc de même de ceux de l'espace E_2. Après deux étapes il en sera évidemment de même puisqu'on a les mêmes calculs. On dit que la distribution $(\frac{5}{8}, \frac{3}{8})$ est une distribution stationnaire pour cette dynamique de Markov.

[1] Exemple extrait du livre "Mathematical Models in Biology", E.S. Allman et J.A. Rhodes, Cambridge University Press, 2004

(2) L'assimilation d'une proportion à une probabilité est l'application de la Loi des Grands nombres, qui traite de la limite à l'infini du nombre d'arbres. Certe 1000 est grand mais pas infini ! Après deux étapes on aura

$$1000 \cdot \pi_1 \begin{pmatrix} 0{,}9925 \\ 0{,}0125 \end{pmatrix} = (22{,}3 \quad 977{,}7) \begin{pmatrix} 0{,}9925 \\ 0{,}0125 \end{pmatrix} = (22{,}3 \cdot 0{,}9925 + 977{,}7 \cdot 0{,}0125) = 34{,}35 \text{ arbres}$$

soient 34 arbres environ de l'espèce E_1.