NOM : Corrigé
PRENOM :

Date :
Groupe :

Mathématiques Appliquées à la Biologie : Feuille-réponses du TD 2
Initiation au calcul matriciel

On répondra aux questions posées aussi clairement que possible dans les espaces prévus et on remettra cette *feuille-réponses* en fin de séance à l'enseignant chargé du Cours/TD.

Exercice 1. :

1. Soit une chaine de Markov à 2 états de matrice de transition $\mathbb{P}$ telle que $p_{11} = 0,9$ et $p_{21} = 0,2$. Calculer l'image π_1 par la chaine de Markov de la distribution initiale $\pi_0 = (1\ ; 0)$.

On détermine d'abord les 2 coefficients manquants $\mathbb{P} = \begin{pmatrix} 0,9 & 0,1 \\ 0,2 & 0,8 \end{pmatrix}$
$p_{12} = 1 - p_{11} = 0,1$ et $p_{22} = 1 - p_{11} = 0,8$
Puis on calcule π_1 en effectuant le produit $\pi_1 = \pi_0 \mathbb{P}$

$$\pi_0 \mathbb{P} = (1 \quad 0) \begin{pmatrix} 0,9 & 0,1 \\ 0,2 & 0,8 \end{pmatrix} = (0,9 \quad 0,1)$$

On trouve donc $\pi_1 = (0,9 \quad 0,1)$.

2. Calculer le nombre α tel que $\pi_0^* = (\alpha\ ; (1-\alpha))$ soit une distribution stationnaire.

La distribution $\pi_0^* = (\alpha \quad 1-\alpha)$ est stationnaire si elle vérifie $\pi_0^* \mathbb{P} = \pi_0^*$
Donc on doit avoir :

$$(\alpha \quad 1-\alpha) \begin{pmatrix} 0,9 & 0,1 \\ 0,2 & 0,8 \end{pmatrix} = (0,9\alpha + 0,2(1-\alpha) \quad 0,1\alpha + 0,8(1-\alpha)) = (\alpha \quad 1-\alpha)$$

Cela conduit à $\begin{cases} 0,9\alpha + 0,2(1-\alpha) = \alpha \\ 0,1\alpha + 0,8(1-\alpha) = 1-\alpha \end{cases}$ soit $\begin{cases} 0,3\alpha = 0,2 \\ -0,3\alpha = -0,2 \end{cases}$

On trouve $\alpha = \frac{2}{3}$, donc la distribution π_0^* vaut $\pi_0^* = \left(\frac{2}{3} \quad \frac{1}{3}\right)$.

3. En déduire que $\lambda = 1$ est une valeur propre à gauche de la matrice $\mathbb{P}$; expliquez.

On sait que $\lambda = 1$ est une valeur propre à gauche de $\mathbb{P}$ s'il existe un vecteur propre non nul V tel que $V\mathbb{P} = \lambda V$ $(= V)$.
Or on vient de montrer (question 2) que $\pi_0^* \mathbb{P} = \pi_0^*$ donc
$\pi_0^* = \left(\frac{2}{3}, \frac{1}{3}\right)$ est bien un vecteur propre à gauche de $\mathbb{P}$ associé à la valeur propre $\lambda = 1$.

4. Calculer le carré $\mathbb{P}^2$, puis les deux produits $\pi_0\mathbb{P}^2$ et $\pi_1\mathbb{P}$. Que constatez-vous ? Expliquez.

On a : $\mathbb{P}^2 = \mathbb{P}\mathbb{P} = \begin{pmatrix} 0,9 & 0,1 \\ 0,2 & 0,8 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0,9 & 0,1 \\ 0,2 & 0,8 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0,83 & 0,17 \\ 0,34 & 0,66 \end{pmatrix}$

$\pi_0 \mathbb{P}^2 = (1 \quad 0) \begin{pmatrix} 0,83 & 0,17 \\ 0,34 & 0,66 \end{pmatrix} = (0,83 \quad 0,17)$

$\pi_1 \mathbb{P} = (0,9 \quad 0,1) \begin{pmatrix} 0,9 & 0,1 \\ 0,2 & 0,8 \end{pmatrix} = (0,83 \quad 0,17)$

On constate que $\pi_0 \mathbb{P}^2 = \pi_1 \mathbb{P}$, ce qui n'est pas étonnant puisque $\pi_0 \mathbb{P}^2 = \pi_0(\mathbb{P}\mathbb{P}) = (\pi_0 \mathbb{P})\mathbb{P} = \pi_1 \mathbb{P}$.
associativité du produit de matrices.

Exercice 2. :

1. Soit la matrice $\mathbb{P} = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 0 \end{pmatrix}$. Calculer $\mathbb{P}^2$ et $\mathbb{P}^3$. En déduire les valeurs de $\mathbb{P}^4$, $\mathbb{P}^5$, ...

$$\mathbb{P}^2 = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 0 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \end{pmatrix} \text{ et } \mathbb{P}^3 = \mathbb{P}^2\mathbb{P} = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

On remarque que $\mathbb{P}^3 = I$ (la matrice identité) ; donc on aura $\mathbb{P}^4 = \mathbb{P}^3\mathbb{P} = I\,\mathbb{P} = \mathbb{P}$, $\mathbb{P}^5 = \mathbb{P}^4\mathbb{P} = \mathbb{P}^2$, ... On en déduit que

$$\mathbb{P}^k = \begin{cases} I & \text{si } k \text{ est un multiple de } 3 \\ \mathbb{P} & \text{si } k \text{ est égal à un multiple de 3 plus 1} \\ \mathbb{P}^2 & \text{si } k \text{ est égal à un multiple de 3 plus 2} \end{cases}$$

2. Est-il possible que l'une des puissance de $\mathbb{P}$, $\mathbb{P}^k$ pour $k \geq 1$, soit une matrice dont tous les coeficients sont strictement positifs (appelée matrice primitive) ?

Il est impossible qu'une puissance de $\mathbb{P}$ soit une matrice strictement positive car ces puissances sont égales à I, $\mathbb{P}$ ou $\mathbb{P}^2$ et ces 3 matrices ont des coefficients nuls.

La matrice $\mathbb{P}$ n'est donc pas une matrice primitive.

3. Pour $\pi_0 = (\alpha\,;\beta\,;\gamma)$, calculer les images successives $\pi_1 = \pi_0\mathbb{P}$, $\pi_2 = \pi_1\mathbb{P}$, ...Qu'observez-vous ?

$$\pi_1 = \pi_0\mathbb{P} = (\alpha\ \beta\ \gamma)\begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 0 \end{pmatrix} = (\gamma\ \alpha\ \beta)$$

$$\pi_2 = \pi_1\mathbb{P} = (\gamma\ \alpha\ \beta)\begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 0 \end{pmatrix} = (\beta\ \gamma\ \alpha)$$

On observe que π_0 se transforme selon une permutation circulaire $(\alpha\ \beta\ \gamma) \to (\gamma\ \alpha\ \beta) \to (\beta\ \gamma\ \alpha)$ et, après 3 étapes, revient à son point de départ $(\alpha\ \beta\ \gamma)$. Ce retour au point de départ est prévisible (question 1) puisque $\mathbb{P}^3 = I$ donc $\pi_3 = \pi_0\mathbb{P}^3 = \pi_0 I = \pi_0$.

4. Trouver un vecteur propre à gauche de $\mathbb{P}$ de valeur propre $\lambda = 1$.

On recherche un vecteur V tel que $V\mathbb{P} = V$. Donc les coefficients $(x\ y\ z)$ de V doivent vérifier l'équation

$$(x\ y\ z)\begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 0 \end{pmatrix} = (z\ x\ y) \quad \text{d'où } (z\ x\ y) = (x\ y\ z)$$

ce qui équivaut au système $\begin{cases} z = x \\ x = y \\ y = z \end{cases}$, d'où $x = y = z$. Tout vecteur ayant ses 3 coefficients égaux est un vecteur propre. Si l'on veut que V soit en outre une distribution de probabilité, il faudra choisir $\left(\frac{1}{3}\ \frac{1}{3}\ \frac{1}{3}\right)$.