NOM : Corrigé
PRENOM :

~~Date~~ :
Groupe :

Mathématiques pour la Biologie : Feuille-réponses du TD 3
Evolution vers une distribution stationnaire

On répondra aux questions posées aussi clairement que possible dans les espaces prévus et on remettra cette *feuille-réponses* en fin de séance à l'enseignant chargé du Cours/TD.

Exercice 1.[1] **:** Un individu vit dans un milieu susceptible d'attraper une maladie par piqûre d'insecte. Il peut être dans l'un des trois états suivants : immunisé (I), malade (M), non malade et non immunisé (S). D'un mois sur l'autre, son état peut changer selon les règles suivantes : étant immunisé, il peut le rester avec une probabilité de $0,9$ ou passer à l'état S avec une probabilité $0,1$; étant malade, il peut le rester avec probabilité $0,2$ ou passer à l'état I avec probabilité $0,8$; enfin, étant dans l'état S, il peut le rester avec probabilité $0,5$ ou passer à l'état M avec probabilité $0,5$.

1. Décrire une chaine de Markov d'espace d'états $S = \{I, M, S\}$ permettant de modéliser la population à laquelle appartient cet individu.

Cette chaîne de Markov sur S aura pour matrice de transition la matrice

$$\mathbb{P} = \begin{array}{c} \begin{array}{ccc} i & m & s \end{array} \\ \begin{pmatrix} 0,9 & 0 & 0,1 \\ 0,8 & 0,2 & 0 \\ 0 & 0,5 & 0,5 \end{pmatrix} \end{array} \begin{array}{c} i \\ m \\ s \end{array}$$

2. Calculer la proportion d'individus malades dans la population après un mois si tous les individus étaient au départ non malades et non immunisés.

L'hypothèse est que la distribution initiale est $\pi_0 = (0 \ \ 0 \ \ 1)$
On peut en déduire la distribution π_1 après un mois
$\pi_1 = \pi_0 \mathbb{P} = (0 \ \ 0,5 \ \ 0,5)$
On en déduit que la proportion d'individus malades est 0,5.

3. Calculer le carré de la matrice de transition et en déduire que cette matrice est primitive. Quelle conséquence cela a-t-il sur la dynamique de cette chaine de Markov ?

On calcule $\mathbb{P}^2 = \mathbb{P}.\mathbb{P}$ $\quad \mathbb{P}^2 = \begin{pmatrix} 0,9 & 0 & 0,1 \\ 0,8 & 0,2 & 0 \\ 0 & 0,5 & 0,5 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0,9 & 0 & 0,1 \\ 0,8 & 0,2 & 0 \\ 0 & 0,5 & 0,5 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0,81 & 0,05 & 0,14 \\ 0,88 & 0,04 & 0,08 \\ 0,4 & 0,35 & 0,25 \end{pmatrix}$

Comme $\mathbb{P}^2$ est une matrice strictement positive, la matrice $\mathbb{P}$ est donc primitive et on peut en déduire l'existence d'une distribution stationnaire vers laquelle tend le système.

4. Si l'on calcule avec l'ordinateur les valeurs propres et vecteurs propres de $\mathbb{P}$, on trouve une valeur propre égale à 1 (et deux autres qui sont des nombres complexes) et le vecteur propre associé est $V = (0,97330\,;012166\,;0,19466)$. En déduire la valeur approchée d'une ditribution stationnaire π^* et indiquer quelle sera la proportion d'individus malades dans cette population à long terme.

On remarque que $0,97330 + 0,12166 + 0,19466 \simeq 1,29$.
Donc $\pi^* = \frac{1}{1,29} V \simeq (0,7547 \ \ 0,0943 \ \ 0,1509)$ sera la distribution stationnaire vers laquelle le système évolue. La proportion d'individus malades tombera donc à moins de 10% (0,0943).

[1](Exercice inspiré du texte en ligne à http ://www.apprendre-en-ligne.net/graphes/markov/index.html)

Exercice 2. : Le magicien d'Oz a comblé tous les désirs des habitants du pays d'Oz, sauf peut-être en ce qui concerne le climat : au pays d'Oz en effet, s'il fait beau un jour, il est certain qu'il pleuvra ou neigera le lendemain, avec une probabilité égale qu'il pleuve ou qu'il neige. Et si le temps d'un jour est pluvieux ou neigeux, alors il reste inchangé dans 50% des cas le lendemain et ne devient beau que dans 25% des cas. Les habitants se sont plaint auprès du magicien, affirmant que, ce faisant, ils n'ont qu'un beau jour sur dix, ce à quoi il a répondu qu'il s'agit d'une impression mais qu'en réalité il y a au moins un beau jour sur cinq. Qu'en est-il ?

Pour le savoir, on se propose de modéliser l'évolution du climat au pays d'Oz par une chaîne de Markov à 3 états, $\{P, B, N\}$ (pour **P**luvieux, **B**eau, et **N**eigeux) dont la matrice de transition est notée $\mathbb{P}$.

1. Que vaut $\mathbb{P}$?

On trouve pour $\mathbb{P}$ la matrice

$$\mathbb{P} = \begin{array}{cc} & \begin{array}{ccc} P & B & N \end{array} \\ & \begin{pmatrix} 0,5 & 0,25 & 0,25 \\ 0,5 & 0 & 0,5 \\ 0,25 & 0,25 & 0,5 \end{pmatrix} \begin{array}{c} P \\ B \\ N \end{array} \end{array}$$

2. On a calculé le carré de la matrice $\mathbb{P}$ et trouvé $\mathbb{P}^2 = \begin{pmatrix} 0,4375 & 0,1875 & 0,375 \\ x & y & 0,375 \\ 0,375 & 0,1875 & 0,4375 \end{pmatrix}$

Compléter les coefficients manquant, en expliquant vos calculs.

$$x = \begin{pmatrix} 0,5 & 0 & 0,5 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0,5 \\ 0,5 \\ 0,25 \end{pmatrix} = (0,5)^2 + 0 + (0,5)(0,25) = 0,375$$

$$y = \begin{pmatrix} 0,5 & 0 & 0,5 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0,25 \\ 0 \\ 0,25 \end{pmatrix} = (0,5)(0,25) + 0 + (0,5)(0,25) = 0,25$$

Vérification $0,375 + 0,25 + 0,375 = 1$

3. Le calcul des puissances successives de la matrice $\mathbb{P}$ montre qu'à partir de la puissance sixième elles restent pratiquement inchangées et égales à la matrice

$$\begin{pmatrix} 0,4 & 0,2 & 0,4 \\ 0,4 & 0,2 & 0,4 \\ 0,4 & 0,2 & 0,4 \end{pmatrix}$$

Cela suggère l'existence d'une distribution stationnaire pour cette chaîne de Markov. Le vérifier en expliquant vos calculs.

Selon la théorie, la ligne $L = (0,4 \;\; 0,2 \;\; 0,4)$ est une distribution stationnaire vers laquelle toute distrib. initiale va évoluer. Pour le vérifier, on multiplie L par $\mathbb{P}$:

$$L\,\mathbb{P} = \begin{pmatrix} 0,4 & 0,2 & 0,4 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0,5 & 0,25 & 0,25 \\ 0,5 & 0 & 0,5 \\ 0,25 & 0,25 & 0,5 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0,4 & 0,2 & 0,4 \end{pmatrix} = L$$

4. En déduire la réponse à la question initiale : qui du magicien ou de la population du pays d'Oz a la bonne estimation du nombre de jours de beau temps ? Expliquer.

Comme la distribution stationnaire limite est $(0,4 \;\; 0,2 \;\; 0,4)$ la proportion de beaux jours (B) sera exactement "à l'équilibre" égale à 0,2, donc il y a effectivement un beau jour sur cinq environs.