NOM :
PRENOM : Corrigé

Date :
Groupe :

Mathématiques pour la Biologie : Feuille-réponses du TD 6
Initiation aux équations différentielles

Exercice 1. : On modélise la dynamique d'une population de bactéries responsable d'une maladie des conifères par l'équation différentielle :

$$\frac{dy(t)}{dt} = 0,1y^2(t)$$

(t exprimé en mois et $y(t)$ en dizaine de mille).

1. Sans résoudre l'équation[1], indiquer le comportement de cette population à l'avenir, selon ce modèle (croissance, décroissance ?).

Une solution $y(t)$ aura une dérivée positive (puisque $0,1y^2(t) \geq 0$)
Elle sera donc croissante.

2. Vérifier que $y(t) = \frac{10}{1-t}$ est une solution de cette équation. Quelle est sa valeur initiale ?

On calcule $y'(t)$ et $0,1y^2(t)$ et on montre qu'elles sont égales
$y'(t) = \frac{+10}{(1-t)^2}$ $\quad 0,1\,y^2(t) = \frac{0,1(10)^2}{(1-t)^2} = \frac{10}{(1-t)^2}$
La valeur initiale $y(0)$ vaut $y(0) = 10$.

3. Remplir les valeurs manquantes de la solution $y(t)$ dans la première ligne du tableau ci dessous :

t	0	$\frac{1}{30}$	$\frac{2}{30}$	$\frac{3}{30}$	$\frac{4}{30}$	$\frac{5}{30}$	.....	$\frac{9}{30}$	$\frac{10}{30}$
$y(t) = \frac{10}{1-t}$	10	10,345	10,714	11,111	11,538	12	.....	14,286	15
$\hat{y}(t)$	10	xxxx	10,666	xxxx	11,425	xxxx	.....	xxxx	11,483
$\tilde{y}(t)$	10	10,333	10,689	11,070	11,478	11,918	.....	14,062	14,721

4. La seconde ligne du tableau calcule la valeur approchée $\hat{y}(t)$ de cette solution par la méthode d'Euler sur une période de 10 jours en prenant un pas de deux jours (2/30). Compléter les deux valeurs manquantes. Comparer avec la solution exacte.

On utilise : $\hat{y}_{n+2} = \hat{y}_n + \frac{1}{15}(0,1)\hat{y}_n^2$

5. La troisième ligne du tableau calcule la valeur approchée $\tilde{y}(t)$ de cette solution par la méthode d'Euler sur une période de 10 jours en prenant cette fois un pas d'une journée. Compléter les deux valeurs manquantes et commentez.

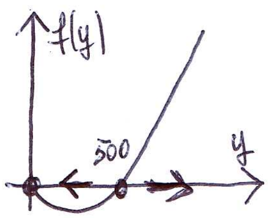
$\tilde{y}_{n+1} = \tilde{y}_n + \frac{1}{30}(0,1)\tilde{y}_n^2$

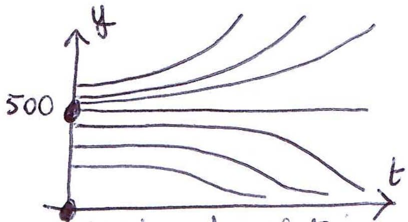
Les deux approximations $\hat{y}$ et $\tilde{y}$ donnent des valeurs inexactes qui, ici, sous-estiment la solution exacte. La seconde, $\tilde{y}$, est un peu moins inexacte car le pas $h = \frac{1}{30}$ est plus petit.

6. On lutte contre cette maladie en utilisant un produit qui induit un taux de mortalité de 50 (pour 10 000) :

$$\frac{dy(t)}{dt} = 0,1y(t)^2 - 50y(t).$$

Tracer le graphe de la fonction $f(y) = 0,1y^2 - 50y$ qui définie cette équation et, en vous servant du signe de cette fonction, prévoir le comportement de cette population selon sa taille initiale $y(0)$.





esquisse des solutions

On constate un comportement des solutions bien différent selon que $y(0) < 500$ ou $y(0) > 500$.

- Dans le premier cas ($y(0) < 500$) la population va décroître et tendre vers 0. Le traitement est donc efficace dans ce cas.
- Au contraire si $y(0) \geq 500$, la population reste stable (si $y(0) = 500$) ou continue à croître (si $y(0) > 500$). Le traitement ne sert donc à rien.

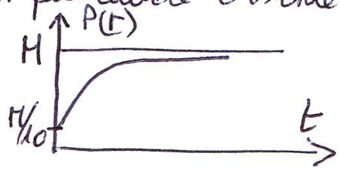
Exercice 2. : Les psychologues utilisent en théorie de l'apprentissage des courbes de performance $P(t)$ qui indiquent le niveau atteint à l'instant t par une personne qui acquiert une compétence. La dérivée $\frac{dP(t)}{dt}$ de $P(t)$, qui indique la vitesse d'acquisition de cette compétence, est supposée proportionelle à $M - P(t)$, où M est le niveau maximal atteignable par la personne (cela signifie qu'au début de l'apprentissage, celui-ci est rapide puis, à mesure que le niveau maximal approche, la vitesse d'acquisition diminue). On a donc pour $P(t)$ une équation différentielle de la forme

$$\frac{dP(t)}{dt} = k(M - P(t))$$

où $k > 0$ est une constante. Cette équation différentielle est-elle une équation linéaire ?

Résoudre cette équation différentielle et indiquer l'allure d'une courbe de performance $P(t)$ (en choisissant une valeur raisonnable pour $P(0)$).

Cette équation est linéaire et possède une solution particulière "évidente" $p^*(t) = M$. Sa solution générale est donc
$P(t) = M + (P(0) - M)\, e^{-kt}$
Si on choisit, par exemple, $P(0) = M/10$, l'allure sera la suivante :



Exercice 3. : Des nutriments entrent dans une cellule à la vitesse constante R molécules par unité de temps et en sortent proportionnellment à la concentration. Si $N(t)$ désigne la concentration à l'instant t cette dynamique peut s'écrire $\frac{dN(t)}{dt} = R - KN(t)$. Selon ce modèle, la concentration va-t-elle tendre vers un équilibre ? Lequel ? Est-il stable ?

Ici la fonction f est la fonction $f(N) = R - KN$. Cette fonction s'annule en $N = \frac{R}{K}$ et sa dérivée $f'(N) = -K$ est négative (si $K>0$). Le modèle a donc un unique équilibre $N^* = \frac{R}{K}$ qui est stable. Donc, selon ce modèle, la concentration va tendre vers $N^* = \frac{R}{K}$.

Exercice 4. :

1. Montrer que l'équation différentielle

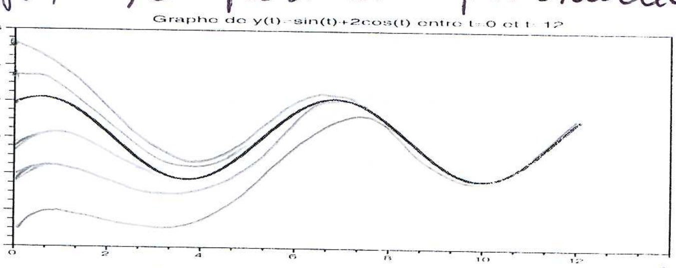
$$\frac{dy(t)}{dt} = -2y(t) + 5\cos t$$

possède une solution particulière de la forme $\hat{y}(t) = A\cos t + B\sin t$ puis l'utiliser pour résoudre l'équation différentielle.

On doit avoir $(A\cos t + B\sin t)' = -2(A\cos t + B\sin t) + 5\cos t$
d'où $\begin{cases} -A = -2B \\ B = 5 - 2A \end{cases}$ et donc $\begin{cases} A = 2 \\ B = 1 \end{cases}$
L'équation a donc pour solution particulière $y^*(t) = 2\cos t + \sin t$
et pour solution générale $y(t) = 2\cos t + \sin t + (y(0) - 2)\, e^{-2t}$.

2. Indiquer l'allure des graphes des solutions de l'équation sur la figure ci-dessous et décrire leur comportement lorsque t tend vers l'infini. On appelle parfois la solution $\hat{y}(t)$ un *équilibre dynamique*.

L'écart entre une solution $y(t)$ et la solution particulière est la fonction $(y(0) - 2)\, e^{-2t}$ qui est une exponentielle décroissante



si $y(0) > 2$ (ou croissante si $y(0) < 2$) qui tend rapidement vers 0 quand t augmente. D'où les tracés.