NOM : Corrigé
PRENOM :

Date :
Groupe :

Mathématiques pour la Biologie : Feuille-réponses du TD 7
Equations différentielles : autres exemples

Exercice 1. : Soit l'équation différentielle $y' = 5y - 3e^{-t}$.

1. Trouver une solution particulière de la forme $y(t) = Ae^{-t}$.

On a $y'(t) = (A e^{-t})' = -Ae^{-t}$, par ailleurs on a

$$5y - 3e^{-t} = 5Ae^{-t} - 3e^{-t} = \underbrace{(5A-3)e^{-t} \overset{\text{si } y \text{ est solution}}{=} -Ae^{-t}} (= y')$$

Il faut et il suffit donc de choisir A tel que $5A - 3 = -A$

$\Leftrightarrow 5A + A = 3 \Leftrightarrow 6A = 3 \Leftrightarrow A = \frac{3}{6} = \frac{1}{2}$

Solution particulière : $\boxed{y^*(t) := \frac{1}{2}e^{-t}}$

2. En déduire la solution générale de l'équation.

On sait que, si y^* désigne une solution particulière, alors toute solution est donnée par

$$y = y^*(t) + (y(0) - y^*(0))\, e^{\int_0^t a(t)\,dt} = \frac{1}{2}e^{-t} + \left(y(0) - \frac{1}{2}e^{-0}\right) e^{\int_0^t 5\,dt}$$

$$= \frac{1}{2}e^{-t} + \left(y(0) - \frac{1}{2}\right) e^{[5t]_{t=0}^{t=t}} = \boxed{\frac{1}{2}e^{-t} + \left(y(0) - \frac{1}{2}\right)e^{5t} = y(t)}$$

3. Trouver la solution particulière de condition initiale $y(0) = \frac{3}{2}$. Calculer sa valeur en $t = \frac{1}{10}$.

Cette (autre) solution particulière y_* vaut donc

$$y_*(t) = \frac{1}{2}e^{-t} + \left(y_*(0) - \frac{1}{2}\right)e^{5t} = \frac{1}{2}e^{-t} + \left(\frac{3}{2} - \frac{1}{2}\right)e^{5t} = \boxed{\frac{1}{2}e^{-t} + e^{5t} = y_*(t)}$$

Exercice 2. : L'écologiste W.C. Allee (1931) fut l'un des premier à étudier de façon détaillée l'effet de la densité d'une population sur son taux de croissance en mettant notamment en évidence le fait, connu aujourd'hui sous le nom d'*effet Allee*, qu'une densité trop faible peut altérer la capacité de reproduction ou de survie de la population. Une bonne connaissance de cet effet est notamment importante lors des programme de réintroduction d'espèces menacées ou disparues car ces programmes concernant presque toujours un tout petit nombre d'individus, cet effet peut être l'une des causes d'échec de ces programmes de conservation.

Etudions cet effet sur un exemple :

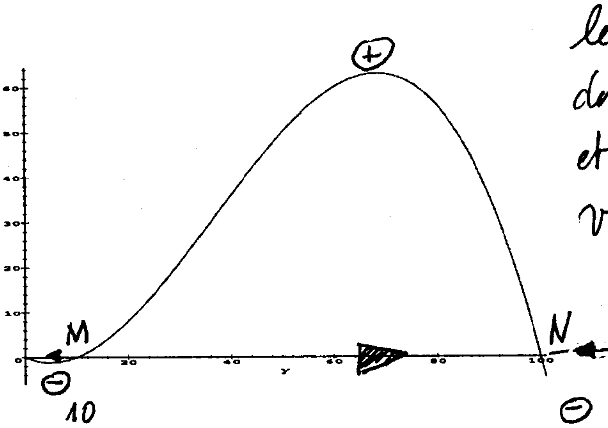
En observant la dynamique d'une population d'écureuils, on a pu faire les observations suivantes :

- Si la population est trop grande, le taux de croissance décroît ou même devient négatif.
- Si la population est trop petite, les écureuils en age de se reproduire courent le risque de ne pas trouver de partenaire et donc, là encore, le taux de croissance est négatif.

On propose le modèle dynamique suivant pour cette population d'écureuils, k, N et M étant des constantes positives telles que $N > M$:

$$y' = ky\left(1 - \frac{y}{N}\right)\left(\frac{y}{M} - 1\right) =: f(y)$$

1. Voici le graphe de la fonction $f(y) = ky(1 - \frac{y}{N})(\frac{y}{M} - 1)$, dans le cas où $k = 0,5$, $M = 10$ et $N = 100$.



le signe de f donne le signe de y' et donc le sens de variation des solutions $t \mapsto y(t)$ indiqué par des flèches

Calculer les équilibres de ce modèle et déterminer leur stabilité à l'aide du graphique.

Les equilibres sont les solutions constante, donc $0 = y' = f(y)$

$f(y) := ky(1 - \frac{y}{N})(\frac{y}{M} - 1) = 0 \iff y = 0$ ou $1 - \frac{y}{N} = 0$ ou $\frac{y}{M} - 1 = 0$

On a donc 3 equilibres : $\boxed{y = 0, \ y = \underset{= 100}{N} \text{ et } y = \underset{= 10}{M}}$

Sur la figure ci-dessus on voit que les solutions s'éloignent de l'équilibre M et s'approchent des équilibres 0 et N.

L'équilibre M est donc instable et les equilibres 0 et N sont stables

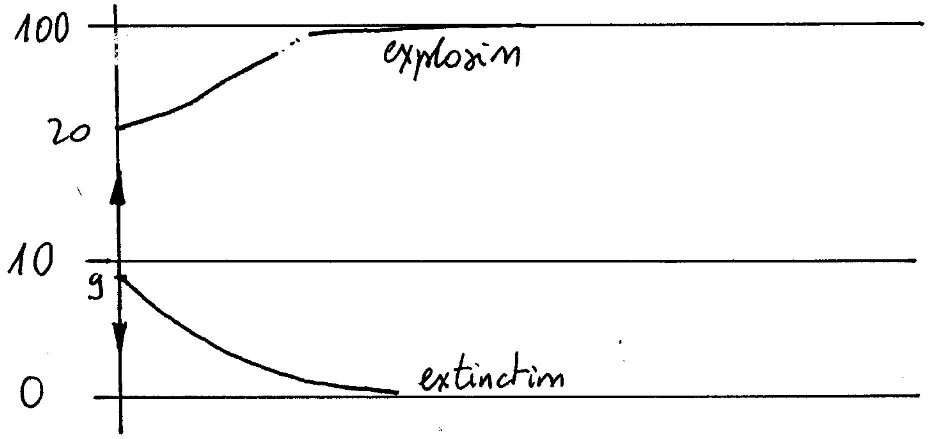
2. Donner l'expression développée de la fonction $f(y) = ky(1 - \frac{y}{N})(\frac{y}{M} - 1)$ puis calculer sa dérivée en $y = 0$. L'utiliser pour vérifier la stabilité de l'équilibre $y^* = 0$ en utilisant le critère de stabilité.

$f(y) = ky(1 - \frac{y}{N})(\frac{y}{M} - 1) = ky\left(-1 + \frac{y}{N} + \frac{y}{M} - \frac{y^2}{MN}\right) = -ky + k(\frac{1}{M} + \frac{1}{N})y^2 - \frac{k}{MN}y^3$

donc $f'(y) = -k + 2k(\frac{1}{M} + \frac{1}{N})y - \frac{3k}{MN}y^2$ d'où $f'(0) = -k + 0 + 0 + 0 = -k < 0$

Page 2 du cours 6, la deuxième définition nous indique que, comme $f'(0) = -0,5 < 0$, l'équilibre $y^* = 0$ est donc stable.

3. Faire une esquisse des graphes de quelques solutions $(t, y(t))$ et indiquer ce qu'il advient de la population d'écureuils selon ce modèle (explosion, extinction, ...) dans les trois cas suivants, $y(0) = 9$, $y(0) = 10$ et $y(0) = 20$.



4. On a calculé les valeurs approchées par la méthode d'Euler de deux solutions dans le tableau suivant. Choisir l'une des valeurs (différente de celle de vos voisins proches) et détailler les calculs permettant de l'obtenir à partir de la valeur située dans la case précédente du tableau.

t	0	$\frac{1}{10}$	$\frac{2}{10}$	$\frac{3}{10}$	$\frac{4}{10}$	$\frac{5}{10}$	$\frac{6}{10}$	$\frac{7}{10}$
$y_n(t)$	9	$8,96$	$8,92$	$8,87$	$8,83$	$8,78$	$8,73$	$8,68$
$y_n(t)$	20	$20,8$	$21,69$	$22,68$	$23,79$	$25,04$	$26,46$	$28,06$

on a $dt = h = \frac{4}{10} - \frac{3}{10} = \frac{1}{10} = 0{,}1$

$$y_{n+1} = y_n + h \cdot f(y_n) = 8{,}87 + 0{,}1 \cdot 0{,}5 \cdot 8{,}87 \left(1 - \frac{8{,}87}{100}\right)\left(\frac{8.87}{10} - 1\right)$$

$$= 8{,}8243.. = 0{,}82..$$

A noter que sans-doute l'approximation pour $t = \frac{3}{10}$ vaut $8{,}87..$ ce qui fait que $y_{n+1} = 8{,}82..$ s'arrondit à 8.83

5. S'il y avait un programme de réintroduction de cette population, quel serait le minimum raisonable d'individus qu'il faudrait réintroduire pour qu'il y ait une chance d'obtenir un résultat durable ? Expliquer pourquoi.

Nous voyons que toute réintroduction d'un nombre d'individus strictement inférieur à 10 retourne à l'extinction. Il faut donc réintroduire au moins 10 individus (ou plutôt <u>un peu plus</u> car toute disparition d'un individu par un accident non pris en compte par le modèle conduit à une extinction ; <u>mais que à l'explosion</u> dans ce cas !)

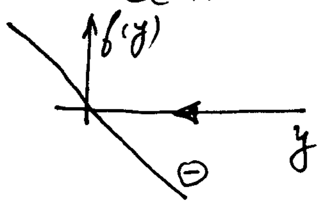
Exercice 3. : On considère une population de prédateurs $y(t)$ qui se nourrissent exclusivement de proies celle-ci formant une population notée $x(t)$. On propose le modèle suivant pour la dynamique de la population de prédateurs (β et q sont des constantes positives) :

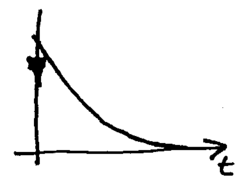
$$\frac{dy(t)}{dt} = \beta x(t)y(t) - qy(t)$$

1. Décrire la dynamique de la population de prédateurs en l'absence de proies.

L'absence de proies correspond à $x(t) = 0$ pour tout t

Le modèle dans ce cas est $\frac{dy(t)}{dt} = 0 - q\,y(t)$





$y(t) = y(0)\, e^{-qt}$ décroissance exponentielle.

2. Expliquer ce que représente le terme $\beta x(t)y(t)$.

Le terme $\beta x(t)y(t)$ représente la natalité rendue possible par une population $x(t)$ de proies. Le <u>taux</u> de natalité est donc $\beta x(t)$ et est donc proportionnel au nombre de proies.

3. Décrire la dynamique de la population de prédateurs lorsque la populations des proies est supposée constante ($x(t) = C^{ste}$).

Si on maintient constante la quantité de proie ($x(t) = C$) il y a un taux de natalité constant βC. Le modèle est alors

$\frac{dy}{dt} = \beta C y - q y = (\beta C - q)\, y$; $\beta C - q$ = taux de reproduction en présence de proies constante

La population de prédateurs sera donc croissante si et seulement si $\beta C - q > 0$.

4. Quelle équation pourriez-vous proposer pour modéliser la dynamique de la population de proies?

En l'absence de prédateurs les proies ont tendance à proliférer. Le modèle le plus simple est le modèle malthusien $\frac{dx}{dt} = r x$

ou logistique $\frac{dx}{dt} = r x \left(1 - \frac{x}{K}\right)$ (K maximum biotique).

En présence de prédateurs, il y a un terme de mortalité par prédation ; cette mortalité peut être proportionnelle à la fois au nombre de prédateurs et au nombre de proies $\alpha x y$.

ce qui conduit à deux modèles $\boxed{\frac{dx}{dt} = r x - \alpha x y}$ ou $\boxed{\frac{dx}{dt} = r x\left(1 - \frac{x}{K}\right) - \alpha x y}$