

Exercice 2. : On suppose¹ que l'on s'intéresse à une forêt composée de deux espèces d'arbres, E_1 et E_2 . Lorsqu'un arbre meurt, un nouveau grandit à sa place mais il peut être de l'une ou l'autre des deux espèces. Ceux de la première espèce ayant une longue durée de vie, on suppose que 1% d'entre eux meurt chaque année alors que ce taux est de 5% pour la deuxième espèce. Mais ces derniers grandissant plus rapidement réussiront plus souvent à occuper une place laissée vacante : on suppose que 75% des places vacantes sont prises par un arbre de la deuxième espèce contre seulement 25% pour un arbre de la première espèce.

1. Expliquer comment l'on peut modéliser la dynamique de cette forêt par une chaîne de Markov $(X_t)_{t \geq 0}$ à deux états E_1 et E_2 et justifier la formule suivante :

$$P(X_{t+1} = E_1 / X_t = E_1) = 0,99 + 0,01 \cdot 0,25 = 0,9925.$$

2. En déduire la matrice de transition \mathbb{P} de la chaîne de Markov .
3. Tracer le diagramme en points et flèches associé.
4. Si l'on commence avec une population de 10 arbres de l'espèce E_1 et 990 de l'espèce E_2 , combien aura-t-on d'arbres de l'espèce E_1 après une étape, après deux étapes ?
5. Calculer l'image de la distribution $\pi_0 = (0,01 \ 0,99)$ par cette chaîne de Markov.
6. Reprendre les deux questions précédentes si l'on suppose qu'il y a au départ une proportion de cinq arbres de la première espèce contre trois de la seconde.

¹Exemple extrait du livre "Mathematical Models in Biology", E.S. Allman et J.A. Rhodes, Cambridge University Press, 2004