NOM : Date : .
PRENOM : Groupe : .

Mathématiques pour la Biologie : Feuille-réponses du TD 6
Initiation aux équations différentielles

Exercice 1. : On modélise la dynamique d'une population de bactéries responsable d'une maladie des conifères par l'équation différentielle :

$$\frac{dy(t)}{dt} = 0,1y^2(t)$$

(t exprimé en mois et $y(t)$ en dizaine de mille).

1. Sans résoudre l'équation[1], indiquer le comportement de cette population à l'avenir, selon ce modèle (croissance, décroissance ?).

2. Vérifier que $y(t) = \frac{10}{1-t}$ est une solution de cette équation. Quelle est sa valeur initiale ?

3. Remplir les valeurs manquantes de la solution $y(t)$ dans la première ligne du tableau ci dessous :

t	0	$\frac{1}{30}$	$\frac{2}{30}$	$\frac{3}{30}$	$\frac{4}{30}$	$\frac{5}{30}$	.....	$\frac{9}{30}$	$\frac{10}{30}$
$y(t) = \frac{10}{1-t}$	10	$10,345$	$----$	$11,111$	$11,538$	12	.....	$14,286$	$----$
$\hat{y}(t)$	10	xxxx	$----$	xxxx	$----$	xxxx	.....	xxxx	$14,483$
$\tilde{y}(t)$	10	$----$	$10,689$	$11,070$	$11,478$	$11,918$	.....	$14,062$	$----$

4. La seconde ligne du tableau calcule la valeur approchée $\hat{y}(t)$ de cette solution par la méthode d'Euler sur une période de 10 jours en prenant un pas de deux jours (2/30). Compléter les deux valeurs manquantes. Comparer avec la solution exacte.
5. La troisième ligne du tableau calcule la valeur approchée $\tilde{y}(t)$ de cette solution par la méthode d'Euler sur une période de 10 jours en prenant cette fois un pas d'une journée. Compléter les deux valeurs manquantes et commentez.

6. On lutte contre cette maladie en utilisant un produit qui induit un taux de mortalité de 50 (pour 10 000) :

$$\frac{dy(t)}{dt} = 0,1y(t)^2 - 50y(t).$$

Tracer le graphe de la fonction $f(y) = 0,1y^2 - 50y$ qui définie cette équation et, en vous servant du signe de cette fonction, prévoir le comportement de cette population selon sa taille initiale $y(0)$.

[1] On pourrait la résoudre en la réécrivant $\frac{dy}{y^2} = 0,1dt$ puis en intégrant les deux termes

Exercice 2. : Les psychologues utilisent en théorie de l'apprentissage des courbes de performance $P(t)$ qui indiquent le niveau atteint à l'instant t par une personne qui acquiert une compétence. La dérivée $\frac{dP(t)}{dt}$ de $P(t)$, qui indique la vitesse d'acquisition de cette compétence, est supposée proportionelle à $M - P(t)$, où M est le niveau maximal atteignable par la personne (cela signifie qu'au début de l'apprentissage, celui-ci est rapide puis, à mesure que le niveau maximal approche, la vitesse d'acquisition diminue). On a donc pour $P(t)$ une équation différentielle de la forme

$$\frac{dP(t)}{dt} = k(M - P(t))$$

où $k > 0$ est une constante. Cette équation différentielle est-elle une équation linéaire ?

Résoudre cette équation différentielle et indiquer l'allure d'une courbe de performance $P(t)$ (en choisissant une valeur raisonnable pour $P(0)$).

Exercice 3. : Des nutriments entrent dans une cellule à la vitesse constante R molécules par unité de temps et en sortent proportionnellment à la concentration. Si $N(t)$ désigne la concentration à l'instant t cette dynamique peut s'écrire $\frac{dN(t)}{dt} = R - KN(t)$. Selon ce modèle, la concentration va-t-elle tendre vers un équilibre ? Lequel ? Est-il stable ?

Exercice 4. :

1. Montrer que l'équation différentielle

$$\frac{dy(t)}{dt} = -2y(t) + 5\cos t$$

possède une solution particulière de la forme $\hat{y}(t) = A\cos t + B\sin t$ puis l'utiliser pour résoudre l'équation différentielle.

2. Indiquer l'allure des graphes des solutions de l'équation sur la figure ci-dessous et décrire leur comportement lorsque t tend vers l'infini. On appelle parfois la solution $\hat{y}(t)$ un é*quilibre dynamique.*