NOM : Date : .
PRENOM : Groupe : .

Mathématiques pour la Biologie : Feuille-réponses du TD 7
Equations différentielles : autres exemples

Exercice 1. : Soit l'équation différentielle $y' = 5y - 3e^{-t}$.

1. Trouver une solution particulière de la forme $y(t) = Ae^{-t}$.

2. En déduire la solution générale de l'équation.

3. Trouver la solution particulière de condition initiale $y(0) = \frac{3}{2}$. Calculer sa valeur en $t = \frac{1}{10}$.

Exercice 2. : L'écologiste W.C. Allee (1931) fut l'un des premier à étudier de façon détaillée l'effet de la densité d'une population sur son taux de croissance en mettant notamment en évidence le fait, connu aujourd'hui sous le nom d'*effet Allee*, qu'une densité trop faible peut altérer la capacité de reproduction ou de survie de la population. Une bonne connaissance de cet effet est notamment importante lors des programme de réintroduction d'espèces menacées ou disparues car ces programmes concernant presque toujours un tout petit nombre d'individus, cet effet peut être l'une des causes d'échec de ces programmes de conservation.

Etudions cet effet sur un exemple :

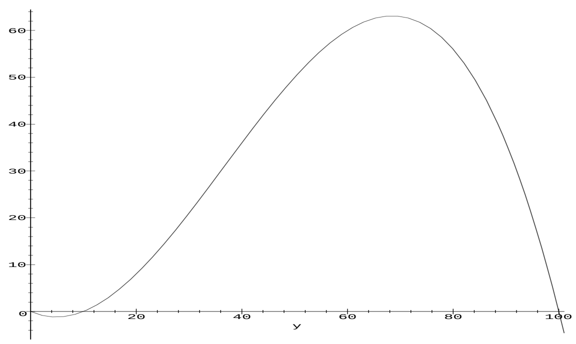
En observant la dynamique d'une population d'écureuils, on a pu faire les observations suivantes :

- Si la population est trop grande, le taux de croissance décroît ou même devient négatif.
- Si la population est trop petite, les écureuils en age de se reproduire courent le risque de ne pas trouver de partenaire et donc, là encore, le taux de croissance est négatif.

On propose le modèle dynamique suivant pour cette population d'écureuils, k, N et M étant des constantes positives telles que $N > M$:

$$y' = ky\left(1 - \frac{y}{N}\right)\left(\frac{y}{M} - 1\right)$$

1. Voici le graphe de la fonction $f(y) = ky(1-\frac{y}{N})(\frac{y}{M}-1)$, dans le cas où $k = 0,5$, $M = 10$ et $N = 100$.



Calculer les équilibres de ce modèle et déterminer leur stabilité à l'aide du graphique.

2. Donner l'expression développée de la fonction $f(y) = ky(1 - \frac{y}{N})(\frac{y}{M} - 1)$ puis calculer sa dérivée en $y = 0$. L'utiliser pour vérifier la stabilité de l'équilibre $y^* = 0$ en utilisant le critère de stabilité.

3. Faire une esquisse des graphes de quelques solutions $(t, y(t))$ et indiquer ce qu'il advient de la population d'écureuils selon ce modèle (explosion, extinction, ...) dans les trois cas suivants, $y(0) = 9$, $y(0) = 10$ et $y(0) = 20$.

4. On a calculé les valeurs approchées par la méthode d'Euler de deux solutions dans le tableau suivant. Choisir l'une des valeurs (différente de celle de vos voisins proches) et détailler les calculs permettant de l'obtenir à partir de la valeur située dans la case précédente du tableau.

t	0	$\frac{1}{10}$	$\frac{2}{10}$	$\frac{3}{10}$	$\frac{4}{10}$	$\frac{5}{10}$	$\frac{6}{10}$	$\frac{7}{10}$
$y_n(t)$	9	$8,96$	$8,92$	$8,87$	$8,83$	$8,78$	$8,73$	$8,68$
$y_n(t)$	20	$20,8$	$21,69$	$22,68$	$23,79$	$25,04$	$26,46$	$28,06$

5. S'il y avait un programme de réintroduction de cette population, quel serait le minimum raisonable d'individus qu'il faudrait réintroduire pour qu'il y ait une chance d'obtenir un résultat durable ? Expliquer pourquoi.

Exercice 3. : On considère une population de prédateurs $y(t)$ qui se nourrissent exclusivement de proies celle-ci formant une population notée $x(t)$. On propose le modèle suivant pour la dynamique de la population de prédateurs (β et q sont des constantes positives) :

$$\frac{dy(t)}{dt} = \beta x(t)y(t) - qy(t)$$

1. Décrire la dynamique de la population de prédateurs en l'absence de proies.

2. Expliquer ce que représente le terme $\beta x(t)y(t)$.

3. Décrire la dynamique de la population de prédateurs lorsque la populations des proies est supposée constante ($x(t) = C^{ste}$).

4. Quelle équation pourriez-vous proposer pour modéliser la dynamique de la population de proies ?