Université de Nice — Année 2007-2008
Département de Mathématiques — Licence MI 1e année

Analyse : notes du cours 1
Approximation linéaire

Vous connaissez la notion de dérivée d'une fonction d'une variable réelle ainsi que les formules permettant de la calculer pour une fonction simple (si nécessaire, c'est le moment de retrouver votre formulaire favori et de vous le remettre à l'esprit...). Dérivée (d'une fonction) et tangente (son graphe) sont les deux mammelles de l'approximation linéaire.

1. Dérivée :

Une fonction dérivable est une fonction qui, au voisinage de chaque point de son domaine de définition peut être *suffisamment bien* approchée par une fonction linéaire[1] qu'on appelle sa linéarisée (au point en question). Comme on ne sait pas trop comment donner un sens à *approcher suffisamment bien*,on donne une définition qui parle plutôt de limite de corde (pourquoi ?) :

Définition : Une fonction f de domaine de définition $\mathcal{D}$ est *dérivable en* $x_0 \in \mathcal{D}$ si $\frac{f(x)-f(x_0)}{x-x_0}$ admet une limite quand x tend vers x_0 en restant dans $\mathcal{D}$. Dans ce cas, on note cette limite $f'(x_0)$. La fonction f est dite *dérivable* (simplement, sans préciser *en* $x_0 \in \mathcal{D}$) si elle est dérivable en chaque point x_0 de son domaine de définition $\mathcal{D}$.

On connait trois raisons qui peuvent empécher une fonction *ordinaire* d'être dérivable en un point x_0 : soit son graphe présente un *coin* comme la fonction $|x|$ en $x_0 = 0$, soit elle n'est pas continue comme la fonction *partie entière*[2] aux points x_0 entiers, soit enfin qu'elle possède une tangente verticale comme la fonction $\sqrt{x}$ en $x_0 = 0$. Sinon, les fonctions *ordinaires* sont généralement dérivables et on calcule la fonction dérivée f' au moyen des formules usuelles (dont voici pour mémoire les principales) :

$(C^{st})' = 0$	$(exp)' = exp$	$\sin' = \cos$
$(x \mapsto x^n)' = x \mapsto nx^{n-1}$	$(x \mapsto \ln x)' = x \mapsto \frac{1}{x}$	$\cos' = -\sin$

et des règles usuelles de dérivation :

$(u+v)' = u' + v'$	$(uv)' = u'v + uv'$	$(u \circ v)' = (u' \circ v).v'$
$(\lambda u)' = \lambda u'$	$(\frac{u}{v})' = \frac{u'v-uv'}{v^2}$	.

2. Linéarisée et tangente :

Si l'on désigne par $L(x)$ la fonction *linéarisée* $L(x) = f(x_0) + f'(x_0)(x - x_0)$, on obtient la propriété caractéristique suivante :

Proposition 1 *Si la fonction $f(x)$ est dérivable en x_0, de dérivée $f'(x_0)$, alors $\frac{f(x)-L(x)}{x-x_0}$ tend vers 0 quand x tend vers x_0 en restant dans le domaine de définition de f.*

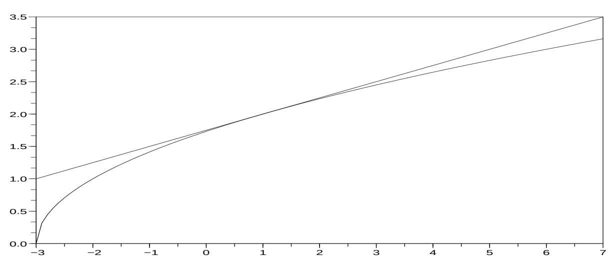

FIG. 1 – La fonction $f(x) = \sqrt{x+3}$ et sa linéarisée $L(x) = \frac{x}{4} + \frac{7}{4}$au point $x_0 = 1$.

La fonction $L(x)$ s'appelle donc la *linéarisée* de f au point x_0. Son graphe est la *tangente* au graphe de f en x_0. Cette proposition dit en quel sens, au voisinage de x_0, la fonction f est *suffisamment bien approchée* par sa linéarisée $L(x)$.

---

[1] il serait plus sage de dire affine : en algèbre linéaire on appelle *affine* une fonction de la forme $f(x) = ax + b$ et une telle fonction n'est *linéaire* que lorsque $b = 0$, c'est-à-dire lorsqu'elle s'écrit $f(x) = ax$. Le graphe d'une fonction affine est une droite et cette fonction n'est linéaire que lorsque la droite passe par $(0, 0)$. C'est rarement le cas pour les tangentes à un graphe de fonction. Au contraire en analyse on appelle linéaire toute fonction de la forme $f(x) = ax + b$.

[2] C'est la fonction qui à x associe le plus grand entier inférieur ou égal à x

Exemple : Pour calculer la linéarisée de $f(x) = \sqrt{x+3}$ au point $x_0 = 1$, on calcule $f(1)$, puis $f'(1)$:

$$f(1) = \sqrt{(1+3)} = 2, \quad f'(x) = \frac{1}{2\sqrt{x+3}}, \text{ donc } f'(1) = \frac{1}{2\sqrt{4}} = \frac{1}{4}$$

En remplaçant dans la définition de $L(x)$, on obtient alors

$$L(x) = 2 + \frac{1}{4}(x-1) = 2 + \frac{x}{4} - \frac{1}{4} = \frac{x}{4} + \frac{7}{4}.$$

On peut représenter sur un même dessin les graphes de f et de sa linéarisée L au point $x_0 = 1$ comme indiqué sur la figure (1).

3. Approximations linéaires : La linéarisée d'une fonction en un point x_0, c'est l'approximation de $f(x)$ qui doit d'autant plus venir à l'esprit que x est voisin de x_0. En effet, non seulement l'erreur commise en remplaçant $f(x)$ par $L(x)$ tend vers 0 lorsque x tend vers x_0, ce qui n'est pas fabuleux vu que $f(x_0)$ ferait aussi bien l'affaire, mais cette erreur tend vers 0 *infiniement plus vite* que $x - x_0$, c'est ce que dit la proposition précédente. Bien voir en revanche que $L(x)$ ne tend pas vers $f(x)$ quand x tend vers x_0, la raison étant que les mathématiciens ont choisi de ne pas donner de sens aux phrases de ce genre.

Exemple : Par exemple, pour approcher le nombre $\sqrt{4,05}$, on peut remarquer qu'il est égal à $f(1,05)$ pour $f(x) = \sqrt{x+3}$ et que l'on connait la linéarisée de f en $x_0 = 1$. Comme $1,05$ est proche de 1, la valeur de L au point $1,05$ fournit une approximation défendable du nombre $f(1,05)$ recherché. Le calcul donne $L(1,05) = 2,0125$, et on écrit :

$$\sqrt{4,05} \simeq 2,0125.$$

Cette approximation est simplement une sorte d'essai qu'on cherchera souvent à préciser au moyen d'une inégalité. Ici une valeur plus précise (donnée par la calculatrice) serait $2,0124612$ et l'inégalité en question peut prendre la forme

$$|\sqrt{4,05} - 2,0125| \leq 0,00004.$$

On verra plus tard comment obtenir une telle inégalité sans calculatrice.

On notera que cette activité d'approximation linéaire n'est plus très utile en elle même aujourdhui car la moindre calculatrice fournit instantanément la valeur cherchée avec une précision bien supérieure dans le cas de fonctions simples d'une variable réelle. Mais elle reste néanmoins intéressante à connaitre car beaucoup de méthodes d'approximation, indispensables dans des contextes plus complexes, sont en fait construites sur la même idée.

4. Methode de Newton :

L'idée d'approximer une fonction par sa linéarisée est à la base d'un algorithme appelé *méthode de Newton* qui permet de calculer les zéros d'une fonction, c'est-à-dire les points $\overline{x}$ où la fonction s'annule. Graphiquement le problème consiste à trouver l'abscisse des points d'intersection du graphe de f avec l'axe des x. Si $f(x)$ est affine, c'est-à-dire de la forme $f(x) = ax + b$, ou si $f(x) = ax^2 + bx + c$ est un polynôme de degré 2, il existe des formules permettant de calculer les zéros de f lorsqu'ils existent (c'est $\overline{x} = -\frac{b}{a}$ dans le premier cas et $\overline{x} = \frac{-b \mp \sqrt{\Delta}}{2a}$ dans le second cas). On sait donc résoudre l'équation $f(x) = 0$ dans ces cas là (et quelques autres) mais en général il n'existe le plus souvent aucunes formules et on a donc recours à une méthode de résolution approchée. La méthode de Newton est l'une des plus utilisée (mais pas la seule).

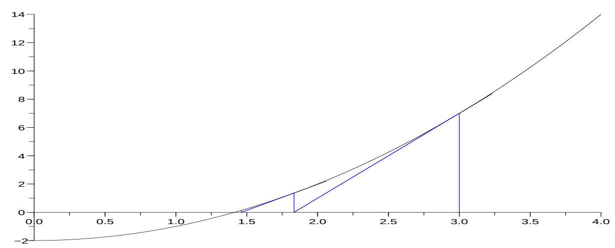

FIG. 2 – Schéma de la méthode de Newton pour le calcul d'une approximation du zéro de $f(x) = x^2 - 2$ (qui n'est autre que $\sqrt{2}$), avec $x_0 = 3$ comme première approximation. On trouve successivement $x_1 \simeq 1,833$ puis $x_2 \simeq 1,462$.

L'idée de la méthode de Newton est facile à comprendre (et elle est illustrée par la figure (2)) : on choisit d'abord une première approximation x_0 du zéro de f cherché. Ce point n'étant pas un zéro, la fonction y est par exemple strictement positive et croissante (le raisonnement est analogue dans les autres cas). En suivant sa tangente jusqu'à l'axe des x on trouve un nouveau point x_1 qui est une meilleure approximation du zéro cherché que le point x_0 de départ. L'idée de l'algorithme est que l'on peut recommencer, en utilisant cette fois la tangente à f en x_1 pour obtenir une approximation x_2 encore meilleure et ainsi de suite. Si tout va bien, la suite x_n ainsi définie converge vers le zéro cherché. Pour calculer les valeurs successive de cette suite, il suffit de se souvenir que l'équation de la tangente à f en x_0 est $y = f(x_0) + f'(x_0)(x - x_0)$, donc x_1 est solution de l'équation $f(x_0) + f'(x_0)(x - x_0) = 0$, d'où la formule $x_1 = x_0 + \frac{f(x_0)}{f'(x_0)}$. On aura de même $x_2 = x_1 + \frac{f(x_1)}{f'(x_1)}$ et, plus généralement,

$$x_{n+1} = x_n - \frac{f(x_n)}{f'(x_n)}$$

Il est donc facile de calculer à la main les premiers termes de cette suite ou d'écrire un programme permettant d'en calculer un grand nombre. Plusieurs questions se posent : tout d'abord, comment choisir x_0, est-on surs que la suite converge effectivement vers le zéro cherché et, si tel est bien le cas, quand peut-on stopper le calcul des x_n pour garantir une approximation suffisamment fine du zéro cherché.

La réponse concernant la convergence est loin d'être positive dans tous les cas[3] car il y a de nombreuses situations où la suite (x_n) oscille, tend vers l'infini où même adopte un comportement chaotique ! En pratique, on se place dans un intervalle où la fonction f change de signe[4] tandis que la dérivée f' de f ainsi que sa dérivée seconde f" n'y change pas de signe ; en effet on sait dans ce cas choisir x_0 pour que l'algorithme converge.

Proposition 2 *Pour une fonction f deux fois dérivable sur un intervalle $[a, b]$ où elle s'annule en un point inconnu $\overline{x}$, la suite (x_n) donnée par l'algorithme de Newton converge bien vers $\overline{x}$ dans les quatre cas suivants :*

1. $f(a) < 0, f(b) > 0, f' > 0, f"(0) > 0, x_0 = b$
2. $f(a) < 0, f(b) > 0, f' > 0, f"(0) < 0, x_0 = a$
3. $f(a) > 0, f(b) > 0, f' < 0, f"(0) > 0, x_0 = a$
4. $f(a) > 0, f(b) > 0, f' < 0, f"(0) < 0, x_0 = b$

Il est utile de faire les quatre dessins correspondants pour comprendre cet énoncé.

Notons que si chacune de ces conditions assurent la convergence de la suite d'approximations, elles n'apportent aucune information sur la *vitesse de convergence* c'est-à-dire sur la rapidité avec laquelle un terme de la suite s'approche de sa limite. Notons enfin que pour la convergence de l'algorithme de Newton et plus généralement pour tous les autres sujets de ce cours d'analyse il existe de nombreux cours en ligne comme par exemple

http ://www.dms.unmontreal.ca/∼ giroux/documents/analyse100.pdf

[3]comme le montrent par exemple les quelques simulations visibles à
http ://math.fullerton.edu/mathews/a2001/Animations/RootFinding/NewtonMethod /NewtonMethod.html

[4]L'existence d'un zéro dans cet intervalle est alors une conséquence du théorème de la valeur intermédiaire

Les deux figures des pages précédentes ont été tracées au moyen d'un logiciel appelé Scilab que vous pouvez facilement (et gratuitement) télécharger pour en disposer sur votre ordinateur. Passez simplement "Scilab" à Google. Vous êtes vivement encouragé à apprendre à l'utiliser pour tous vos calculs et illustrations mathématiques.

Voici le code scilab qui permet de tracer la figure 1 :

```
function y=f(x);y=sqrt(x+3);endfuntion
function y=L(x);y=(1/4)*x+7/4);endfuntion
fplot2d(-3;0.1;7,f); fplot2d(-3;0.1;7,L); plot2d(1,2,0)
```

Voici le code scilab qui permet de tracer la figure 2 :

```
function y=f(x);y=x.*x-2;endfunction;
function y=fprim(x);y=2*x;endfunction;
x0=3
x1=x0-f(x0)/fprim(x0)
x2=x1-f(x1)/fprim(x1)
xx=[x0 x0 x1 x1 x2 x2];
yy=[0 f(x0) 0 f(x1) 0 f(x2)];
plot2d(1 :0.1 :3.5,f(1 :0.1 :3.5))
plot(xx,yy)
```

Exercice 1 *En vous inspirant de la figure 2, réaliser au moyen de Scilab une figure analogue illustrant une autre méthode de calcul de zéros de fonction comme la* méthode de la sécante *ou la* méthode de la fausse position.