Université de Nice
Département de Mathématiques

Année 2007-2008
Licence MI/SM 1e année

Analyse : notes du cours 10
Suites réelles et dynamiques discrètes

Les suites ont de nombreuses applications en mathématiques. Avant tout elles fournissent des approximations : la suite de Newton pour calculer le zéro d'une fonction, la suite de la méthode des trapèzes pour calculer une intégrale, la suite d'Euler pour approcher la solution d'une équation différentielle. On les note $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ et on s'intéresse notamment à leur convergence et aussi, lorsqu'ellent convergent à leur vitesse de convergence.

Mais les suites sont aussi en biologie, en économie, en sociologie, des outils de modélisation de *dynamique discrète*. On les note alors $(x_t)_{t=1,2,...}$ et elles représentent l'évolution au cours du temps d'une quantité x comme par exemple la taille d'une population ou le prix d'un portefeuille. Dans ce cas, on s'intéresse plutôt à décrire l'évolution de x au cours du temps, comportement cyclique, extinction d'une population, bulle financière....

1. Convergence

Une suite de nombres réels est une application $x : \mathbb{N} \to \mathbb{R}$, de l'ensemble des entiers $\mathbb{N}$ dans l'ensemble des réels $\mathbb{R}$, qui à tout $n \in \mathbb{N}$ associe un réel $x_n \in \mathbb{R}$. Les suites arithmétiques, $x_n = x_0 + nr$ de premiers termes x_0 et de raison r et les suites géométriques $x_n = x_0 q^n$ de premier terme x_0 et de raison q, sont les plus connues.

Définition : Une suite x_n est convergente, de limite l, si et seulement si tout intervalle I contenant l contient aussi tous les termes de la suite à *partir d'un certain rang*. On écrit alors $\lim_{n\to\infty} x_n = l$.

Exemple : Considérons la suite $x_n = \frac{2n+1}{n}$, définie pour tout $n \geq 1$. Puisqu'on peut encore l'écrire $x_n = 2+\frac{1}{n}$, sa limite se calcule facilement et vaut $\lim_{n\to\infty} x_n = 2$ puisque $\lim_{n\to\infty} \frac{1}{n} = 0$. Mais vérifions-le à l'aide de la définition précédente. Considérons un intervalle I quelconque contenant la limite $l = 2$. Soit $\varepsilon > 0$ tel que $]2-\varepsilon, 2+\varepsilon[\subseteq I$, par exemple $\varepsilon = \frac{1}{10}$. Dès que $n > 10$, $x_n = 2 + \frac{1}{n} < 2 + \varepsilon$. Donc tous les termes de la suite x_n sont dans I à partir d'un certain rang puisque c'est vrai à partir du rang $n = 11$. Et si on avait choisi $\varepsilon = \frac{1}{100}$ au lieu de $\varepsilon = \frac{1}{10}$, ce serait encore vrai mais à partir du rang $n = 101$ cette fois. On voit donc qu'on pourra, pour chaque $\varepsilon > 0$, aussi petit que l'on veut, choisir un rang N (qui sera d'autant plus grand que ε est petit) tel que $x_n \in]2-\varepsilon, 2+\varepsilon[$ (c'est-à-dire tel que $|x_n - 2| < \varepsilon$) pour tous les n supérieurs à ce N : il suffit en effet de prendre $N = \frac{1}{\varepsilon}$.

Cet exemple permet de comprendre la formalisation suivante de la définition de la convergence, qu'il est bien utile de connaître :

Définition : Une suite réelle x_n est convergente de limite l si et seulement si l'on a :

$$\boxed{\forall \varepsilon > 0, \;\; \exists N, \;\; \forall n > N \quad |x_n - l| < \varepsilon}$$

Un inconvénient de cette définition est qu'on ne peut pas l'utiliser pour prouver la convergence d'une suite dont on ne connaitrait pas la limite. Le critère de Cauchy, que nous introduisons à présent, fournit une définition alternative de la convergence des suites réelles qui se révèle bien utile dans les applications :

Définition : Une suite réelle x_n est convergente (et on l'appelle *suite de Cauchy*) si et seulement si

$$\boxed{\forall \varepsilon > 0, \;\; \exists N, \;\; \forall p, q > N \quad |x_p - x_q| < \varepsilon}$$

Ce critère de convergence, dit critère de Cauchy, a en fait une utilité plutôt théorique que pratique. Il met néanmoins en évidence le fait que les termes d'une suite convergente, en se rapprochant de leur limite doivent aussi nécessairement se rapprocher arbitrairement les uns des autres. C'est cette propriété qui permet d'*arrêter* un programme qui calcule une valeur approchée inconnue (comme l'agorithme de Newton ou celui des trapèzes). En effet, on ne peut pas demander au programme de s'arrêter lorsque l'approximation est assez proche de sa limite puisqu'on ne la connait pas. Mais on peut tester à chaque itération l'écart entre l'ancien terme calculé x_{n-1} et le nouveau x_n et stopper le calcul lorsque cet écart est inférieur à une valeur ε choisie à l'avance (par exemple $\varepsilon = 1/1000$). Si la suite est bien convergente, on sait qu'alors le programme s'arrêtera effectivement.

2. Suites monotones

Rappelons qu'une suite est dite *croissante* lorsque

$$\boxed{\forall n \in \mathbb{N}, \quad x_{n+1} \geq x_n}$$

(et *décroissante* lorsque pour tout $n \in \mathbb{N}$, $x_{n+1} \leq x_n$). Les suites *monotones*, c'est-à-dire les suites croissantes et les suites décroissantes, sont des suites dont le comportement est assez facile à caractériser car elles sont convergentes si et seulement si elles sont bornées.

Théorème 1 *Toute suite croissante et majorée est convergente. De même toute suite décroissante et minorée est convergente.*

Preuve : Rappelons qu'une suite x_n est dite *majorée* si $\boxed{\exists M \in \mathbb{R}, \ \forall n \in \mathbb{N} \quad x_n \leq M.}$

La preuve de ce théorème (on ne démontre que la première partie car si x_n est décroissante et minorée, alors la suite $-x_n$ est croissante et majorée) utilise une propriété fondamentale de $\mathbb{R}$: tout sous-ensemble majoré de $\mathbb{R}$ possède une borne supérieure. On applique cette propriété à l'ensemble infini constitué par tous les termes de la suite $\{x_0, x_1, \ldots, x_n, \ldots\} = \{x_n, n \in \mathbb{N}\}$. Cet ensemble est majoré par M, par hypothèse. Désignons par b sa borne supérieure, c'est-à-dire le plus petit de ses majorants. Aucun réel inférieur à b ne peut être un majorant de la suite (sinon b ne serait pas le plus petit). Donc, pour tout $\varepsilon > 0$, il existe un terme de la suite au moins, disons x_{n_0} qui est plus grand que $b - \varepsilon$. Mais comme la suite est croissante, tous les termes de la suite de rang supérieur à n_0 sont dans l'intervalle $[b - \varepsilon, b]$. Il en résulte que la suite converge vers la limite b d'après la définition de la convergence. $\square$

Pour une suite croissante, il y a donc deux cas possibles, soit elle est majorée et elle converge vers sa borne supérieure, soit elle ne l'est pas et elle diverge, en tendant vers $+\infty$. On note alors $\lim x_n = +\infty$. On dit que la suite *tend vers l'infini* mais c'est bien un cas de divergence.

3. Suites divergentes

Lorsqu'une suite diverge, cela peut être dû principalement à deux raisons (qui peuvent se combiner). Soit elle est non bornée, par exemple elle tend vers $+\infty$ ou vers $-\infty$, soit elle est bornée mais pas monotone par exemple parce qu'elle oscille, comme $x_n = (-1)^n$.

A première vue on pourrait penser que les suites divergentes sont peu utiles. Il n'en est rien, elles sont par exemple souvent utilisées en astronomie. On sait en effet, depuis Henri Poincaré (1854-1912) notamment, que certaines suites divergentes fournissent de bien meilleurs approximations à moindre frais que leurs analogues convergentes : ces dernières convergent parfois si lentement qu'il faudrait calculer des centaines de termes pour avoir une bonne approximation alors qu'avec une suite divergente, bien qu'elle tende vers l'infini, on aura parfois une excellente approximation avec un tout petit nombre de termes (3 ou 4 termes par exemple). L'etude des suites divergentes est un domaine actif de la recherche mathématique aujourd'hui.

4. Récurrence

Pour définir une suite, il y a en réalité deux façons de procéder. Soit comme une fonction $n \mapsto x_n$, où x_n s'exprime directement comme fonction de n comme nous l'avons fait jusqu'à présent, soit par récurrence, en posant :

$$\begin{cases} x_0 \\ x_{n+1} = \varphi(x_n) \end{cases}$$

Parfois on peut passer d'une expression à l'autre, comme dans le cas de la suite géométrique

$$x_n = x_0 q^n \quad \Leftrightarrow \quad \begin{cases} x_0 \\ x_{n+1} = x_n q \end{cases} .$$

Parfois c'est plus difficile, voir impossible. Pour le calcul des termes d'une suite à l'aide de l'ordinateur, la version par récurrence est presque toujours préférable. Par exemple, pour calculer les premiers termes de la suite $x_n = \frac{2^n}{n\,!}$, il est probable qu'un calcul direct ne permet pas de dépasser le rang 10 ou 20 car numérateur et dénominateur vont "exploser". Par contre la relation de récurrence $x_{n+1} = x_n \frac{2}{n+1}$ permet de calculer autant de termes que l'on veut car la suite tend vers 0 quand n tend vers l'infini : en effet, elle est décroissante (le vérifier) et minorée par 0.

On représente souvent les suites definies par récurrence à l'aide d'une *représentation en toile d'araignée* (*cobweb*, en anglais) comme sur la figure ci dessous. Cette représentation met en lumière les liens qui existent entre limites des suites $x_{n+1} = \varphi(x_n)$ et *points fixes* de la fonction φ. Rappelons qu'un nombre x^* est un point fixe d'une fonction $\varphi : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ lorsqu'il vérifie $\varphi(x^*) = x^*$.

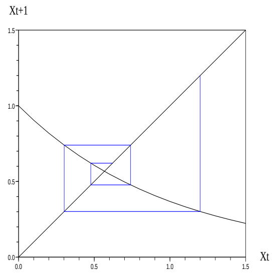

FIG. 1 – Représentation en toile d'araignée de la suite $x_{n+1} = \exp(-x_n)$ dans le cas où l'on a choisi comme premier terme $x_0 = 1.2$.

Théorème 2 *Soit φ une fonction continue. Lorsqu'une suite x_n définie par une relation de récurrence $x_{n+1} = \varphi(x_n)$ converge vers une limite l, cette limite est un point fixe de la fonction φ. Inversement, si la fonction φ possède un point fixe l, si φ est dérivable de dérivée continue et si l'on a $\varphi'(l) < 1$ alors toute suite x_n de premier terme x_0 proche de l et vérifiant la récurrence $x_{n+1} = \varphi(x_n)$, converge vers ce point fixe.*

Preuve : Si x_n tend vers l, on a tout aussi bien $\lim x_{n+1} = l$ que $\lim x_n = l$. Et comme φ est continue, on sait que $\lim \varphi(x_n) = \varphi(\lim x_n)$. On a donc :

$$l = \lim x_{n+1} = \lim \varphi(x_n) = \varphi(\lim x_n) = \varphi(l).$$

Inversement, si au point fixe $x = l$, on a $\varphi'(l) < 1$, ce sera vrai aussi en tous les points d'un voisinage I de l, $I =]l - \alpha, l + \alpha[$. On peut supposer que I a été choisi de telle sorte que $\varphi(I) \subseteq I$ et que, pour tout $x \in I$, on ait $\varphi'(x) < k$ pour un certain $k < 1$. Alors, en utilisant l'inégalité des accroissements finis, on peut écrire[1] :

$$|x_{n+1} - l| = |\varphi(x_n) - \varphi(l)| < k|x_n - l| < k^2|x_{n-1} - l| < \ldots < k^{n-1}|x_1 - l|$$

d'où il résulte que $\lim |x_{n+1} - l| = 0$ car, pour $k < 1$, $\lim k^{n-1} = 0$. Donc la suite x_n converge vers l. $\square$

Remarque : C'est le théorème précédent qui permet de montrer que, dans les bons cas, la suite d'approximations de Newton du zéro d'une fonction est une suite convergente. En effet la suite $x_{n+1} = x_n - \frac{f(x_n)}{f'(x_n)}$ est une récurrence de la forme $x_{n+1} = \varphi(x_n)$, avec $\varphi(x) = x - \frac{f(x)}{f'(x)}$. Les zéros de f sont des points fixes de cette récurrence. Or la dérivée de φ vaut $\varphi'(x) = 1 - \frac{f'^2(x) - f(x)f"(x)}{f'^2(x)} = \frac{f(x)f"(x)}{f'^2(x)}$ et donc elle s'annule en un point x qui est un zéro de f (et pas de sa dérivée). Elle est donc strictement plus petite que 1 au voisinage d'un tel zéro.

5. Deux modèles de dynamiques discrètes :

A titre d'exemples, voici à présent deux modèles de dynamique de population, utisés en écologie notamment, le modèle malthusien et le modèle logistique.

Le premier, très rudimentaire, a été proposé par Thomas Malthus en 1798. Il suppose que la population possède un taux de reproduction r constant, différence du taux de natalité et du taux de mortalité (la population est supposée isolée c'est-à-dire qu'aucune migration n'est envisagée). Si x_t désigne la taille de la population étudiée à l'instant t et x_{t+1} sa taille après une génération, l'accroissement $\Delta x_t = x_{t+1} - x_t$ de la population entre les instants t et $t + 1$ vérifie la formule

$$\Delta x_t = x_{t+1} - x_t = r x_t \tag{1}$$

que l'on peut réécrire comme une récurrence $x_{t+1} = (1 + r)x_t$. Si l'on connait la valeur de x_0, appellée la *condition initiale* (c'est la valeur de la population à l'instant initial $t = 0$), on peut calculer les valeurs suivantes x_1, x_2, ...mais aussi la valeur de x_t à tout instant $t > 0$ car x_t est une suite géométrique de raison $(1 + r)$. Puisque l'on a $(1 + r)^t = e^{t \ln(1+r)}$, ce modèle correspond à une croissance exponentielle

[1] On appelle *contractante* une fonction $\varphi : I \longrightarrow I$ vérifiant

$$\exists k < 1, \ \ \forall x, x' \in I \quad |\varphi(x) - \varphi(x')| < k|x - x'|.$$

de la population lorsque $r > 0$ d'où son nom de *modèle exponentiel* parfois utilisé à la place de *modèle malthusien.* Notons qu'il peut aussi modéliser une décroissance exponentielle si r est négatif. On retiendra qu'*un modèle malthusien prévoit une croissance (ou décroissance) exponentielle de la population modélisée quelque soit sa taille initiale.*

Mais c'est précisément l'un des points les plus discutables du modèle malthusien, celui de prévoir que la population modélisée puisse croître indéfiniment. Il serait certainement plus raisonnable de prendre en compte, comme le suggéra Verhulst en 1836, qu'au fur et à mesure de l'augmentation de sa taille, des facteurs environnementaux (limitation des ressources, limitation de l'espace disponible, ...) viennent freiner cette croissance. Pour modéliser cela, l'idée est de supposer que le taux de reproduction de la population r, c'est-à-dire la quantité $\frac{\Delta x_t}{x_t}$, n'est plus le même quelque soit la taille x_t de la population mais qu'il dépende de la taille de la population. On voudrait qu'il soit plus grand lorsque la taille de la population est petite car dans ce cas les ressources disponibles permettent cette forte croissance et qu'il soit plus petit quand la taille devient plus grande et que les individus commencent à entrer en compétition concernant la nourriture ou l'espace, voire même qu'il devienne négatif au delà d'une certaine taille K, ce qui signifierait un déclin de la population. La plus simple des fonction de x_t ayant ces propriétés est une fonction linéaire affine de pente négative et dont l'ordonnée à l'origine, positive, corresponde au taux de reproduction d'une population suffisamment petite. Pour cela, on remplace dans le modèle (1) le taux constant r par un taux dépendant de la taille x_t que l'on écrit $r(\frac{K-x_t}{K})$, ou encore $r(1-\frac{x_t}{K})$. Cela conduit au *modèle logistique :*

$$x_{t+1} - x_t = r(1 - \frac{x_t}{K})x_t \tag{2}$$

que l'on peut réécrire comme une récurence $x_{t+1} = x_t + rx_t(1 - \frac{x_t}{K})$. La figure (2) donne deux exemples de comportement de telles trajectoires qui présentent une *croissance logistique* ou *croissance amortie* avec une phase de croissance quasiment exponentielle suivie, avec un changement de courbure, d'une phase de croissance de plus en plus lente vers une limite (ici $K = 10$), avec une décroissance quasiment exponentielle de l'écart à K[2]. Notons que malgré la simplicité de la formule (2), on ne peut pas calculer

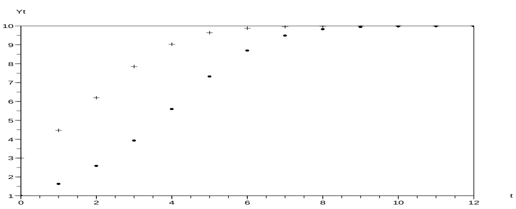

FIG. 2 – Deux trajectoires particulières de la dynamique logistique $\Delta x_t = 0.7x_t(1 - x_t/10)$ pour les conditions initiales $x_0 = 1$ et $x_0 = 3$.

explicitement pour ce modèle la valeur de x_t comme fonction de t et de x_0 comme on a pu le faire pour le modèle malthusien.

Les deux paramètres r et K du modèle logistique ont des interprétations faciles à comprendre. Comme le facteur $r(1 - \frac{x_t}{K})$ vaut pratiquement r lorsque la taille de la population x_t est petite et tendant par contre vers 0 lorsqu'elle se rapproche de K, la constante r, appelée *taux de croissance intrinsèque*, est le taux de reproduction de la population lorsque sa taille est petite et donc qu'il n'y a pas de limitation. La constante K, appelée *capacité biotique*, est une taille limite de la population étudiée vers laquelle elle tend en général (si $r > 0$) lorsque t augmente indéfiniment. C'est une sorte d'effectif d'équilibre dont la valeur dépend des ressources disponibles pour cette population.

6. Equations aux différences du premier ordre :

Les deux modèles malthusiens et logistiques sont deux exemples particuliers d'é*quations aux différences du premier ordre* c'est-à-dire d'équations de la forme

$$x_{t+1} = \varphi(x_t) \tag{3}$$

où φ est une fonction quelconque. Par exemple, $\varphi(y) = (1 + r)y$ dans le cas malthusien et $\varphi(y) = (1+r)y - \frac{ry^2}{K}$ dans le cas logistique. Une *solution* $(x_t)_{t>0}$ d'une équation aux différences (3) est simplement une suite vérifiant cette récurence et son premier terme x_0 s'appelle sa *condition initiale.*

[2]C'est le comportement typique mais d'autres types de comportements peuvent aussi se présenter (la figure (3) donne quelques exemples) y compris des comportements divergents et même chaotiques.

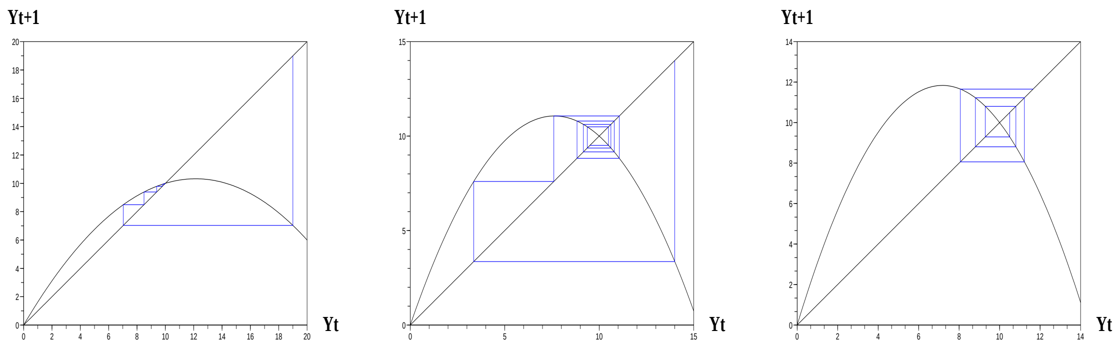

FIG. 3 – Diverses représentations en toile d'araignée (cobweb) d'une dynamique logistique. On a pour ces trois figures $K = 10$, mais on a $r = 0.7$ et $Y_0 = 19$ pour la première, $r = 1.9$ et $Y_0 = 14$ pour celle du milieu et $r = 2.3$ et $Y_0 = 10.5$ pour la dernière. Dans les deux premières figures, l'équilibre $Y^* = 10$ est stable alors qu'il est instable dans la dernière.

Même s'il est toujours possible de calculer de proche en proche les valeurs successives d'une solution, il n'est pas nécessairement facile d'en prédire le comportement à venir, au dela des termes calculés et de décrire le comportement des diverses solutions de l'équation en fonction des conditions initiales.

Le principal outils dont on dispose pour décrire les trajectoires d'une équation aux différences est l'étude des équilibres et de leur stabilité. Un é*quilibre* est une trajectoire constante, c'est-à-dire telle que $x_{t+1} = x_t$ pour tout $t \geq 0$. le nombre x^* est donc un *point fixe* de la fonction φ. Géométriquement, c'est l'abscisse d'un point où le graphe de φ coupe la bissectrice des axes. Lorsqu'on a repéré un équilibre d'une dynamique, la question se pose de savoir si les solutions issues des points voisins vont tendre à se rapprocher de l'équilibre, on dit alors que l'équilibre est *stable*, ou si au contraire elles vont s'en éloigner, on dit alors qu'il est *instable*.

Proposition 3 *Si x^* est un équilibre de l'équation aux différences (3), alors cet équilibre est stable si $|\varphi'(x^*)| < 1$ et instable si $|\varphi'(x^*)| > 1$. Lorsque $\varphi'(x^*) = 1$ ou $\varphi'(x^*) = -1$, on n'est pas en mesure d'en déduire s'il est stable, instable ou ni l'un ni l'autre.*

Les équilibres stables sont essentiels en terme de modélisation car ils correspondent à des comportements types du système dynamique auquel celui-ci aura tendance à s'identifier, après éventuellement une période transitoire, et ce, quelque soit sa position initiale pas trop éloignée de l'équilibre. Au contraire les équilibres instables sont des états dont le système s'écarte sans jamais s'en rapprocher et sont donc d'importance tout théorique. Il est utile de savoir discerner un équilibre stable d'un équilibre instable.

Exemple :

1. L'équation malthusienne (1) possède un unique équilibre $x^* = 0$ et il est instable lorsque $r > 0$ car $\varphi'(0) = 1 + r$. Cela signifie que quelque soit l'effectif initial de la population, il va s'éloigner de 0 lorsque t augmente, donc croître indéfiniment.
2. L'équation logistique (2) possède deux équilibres, $x^* = 0$ et $x^* = K$ (les deux solutions de l'équation $y + ry(1 - y/K) = y$), le premier est instable si $r > 0$ (comme dans le cas malthusien) car $\varphi'(0) = (1 + r)$. Le second est stable lorsque $0 < r < 2$ car $\varphi'(K) = 1 - r$ et instable lorsque $r > 2$.