Université de Nice
Département de Mathématiques Année 2007-2008
Licence MI 1e année

Analyse : notes du cours 2
Maximum et minimum d'une fonction

Dans la vie courante il y a de nombreuses situations où l'on souhaite optimiser une quantité : minimiser une distance à parcourir, minimiser un coût energétique, maximiser une production, minimiser un risque...Or ce domaine de l'optimisation est l'un de ceux où les mathématiques se révèlent le plus utile. De nombreuses méthodes mathématiques d'optimisation ont été implémentées dans des logiciels spécialisés mais les mathématiciens continuent à rechercher continuellement le moyen de les améliorer.

1. Bornes sup/inf et extrema :

Définition : On dit qu'un nombre M est un *majorant* d'une fonction f sur un domaine $\mathcal{D}$ si $f(x) \leq M$ pour tout $x \in \mathcal{D}$. On dit que M est la *borne supérieure* de f sur $\mathcal{D}$ si M est le plus petit des majorants. On a bien sûr des définitions analogues pour *minorant* et *borne inférieure* (plus grand des minorants).

Par exemple, tout nombre $M \geq 1$ est un majorant de la fonction sin sur $\mathcal{D} = \mathbb{R}$ et $M = 1$ est sa borne supérieure. Quelle est sa borne inférieure ?

Définition : Une fonction $f : \mathcal{D} \to \mathbb{R}$ possède un *maximum global* au point $x^* \in \mathcal{D}$ si pour tout $x \in \mathcal{D}$, $f(x) \leq f(x^*)$. La valeur $f(x^*)$, qui est la plus grande valeur prise par la fonction sur $\mathcal{D}$, s'appelle le *maximum global* de f sur $\mathcal{D}$ et x^* l'*argument* de ce maximum. On a évidemment une définition analogue pour le *minimum global* (plus petite valeur prise par f sur $\mathcal{D}$).

Quelle différence y-a-t-il entre un maximum global et une borne supérieure ? entre un minimum global et une borne inférieure ? La fonction exp est un exemple de fonction dont la borne inférieure (qui vaut 0 puisque tous les réels négatifs ou nuls sont des minorants et 0 est le plus grand) n'est pas un minimum global car il n'existe pas de réel x^* dont l'exponentielle est nulle. De même une fonction possédant une asymptote horizontale comme la fonction $x \mapsto 1 - \frac{1}{x}$ (tracer son graphe) possède sur $]0, +\infty[$ une borne supérieure qui vaut 1 et pas de maximum global. On dit dans ce cas que la fonction *n'atteint pas sa borne supérieure* sur $]0, +\infty[$; de même l'exponentielle n'atteint pas sa borne inférieure. A noter cependant que si l'on réduit l'exponentielle sur $[0, +\infty[$, alors elle atteint sa borne inférieure (qui vaut 1) en $x^* = 0$.

2. Théorème de la valeur extrême :

Dans la pratique, ce sont les extrema globaux (maxima ou minima) qui sont recherchés et pour lesquels on a développé des algorithmes, soit pour les calculer exactement lorsque c'est possible, soit au moins pour en calculer des approximations. Mais avant de chercher à calculer un extremum, il peut être utile de connaître des critères assurant que la fonction considérée possède bien un tel extremum global. C'est vrai dans le cas suivant :

Théorème 1 *Une fonction continue définie sur un intervalle* $[a, b]$ *possède un minimum global et un maximum global.*

3. Les extrema locaux :

Dans la recherche d'extrema globaux, la première idée est de repérer le maximum (ou le minimum) comme un point où la dérivée s'annule, c'est-à-dire un point où la tangente est horizontale. Malheureusement ce critère permet de repérer les extrema *locaux* comme nous allons le voir mais ceux-ci ne sont pas nécessairement des extrema globaux.

Définition : Une fonction $f : \mathcal{D} \to \mathbb{R}$ possède un *maximum local* au point $x^* \in \mathcal{D}$ s'il existe un intervalle $I =]x^* - \delta, x^* + \delta[$ contenu dans $\mathcal{D}$ sur lequel $f(x) \leq f(x^*)$. La valeur $f(x^*)$ s'appelle un *maximum local* de f et x^* l'*argument* de ce maximum local. On a évidemment une définition analogue pour *minimum locaux.*

Théorème 2 *Si une fonction dérivable a un extremum local en un point, sa dérivée s'annule en ce point.*

Ce théorème dû à Pierre Fermat (1601-1665) signifie graphiquement qu'à chaque extremum local correspond un point du graphe où la tangente est horizontale.

Preuve : Comme la fonction f a un extremum local, par exemple un maximum, en $x^* \in \mathcal{D}$, cela signifie qu'il existe un intervalle $I =]x^* - \delta, x^* + \delta[$ sur lequel $f(x) - f(x^*) \leq 0$. Si de plus $x < x^*$, il en résulte que $\frac{f(x)-f(x^*)}{x-x^*} \geq 0$. La dérivée de f en x^* étant la limite de ce rapport quand x tend vers x^*, cela entraine que cette dérivée $f'(x^*)$ doit vérifier $f'(x^*) \geq 0$. Mais on peut reproduire ce même raisonnement pour les x tels que $x > x^*$. Dans ce cas, on établira que $f'(x^*) \leq 0$. La seule valeur possible pour $f'(x^*)$ est donc $f'(x^*) = 0$. $\square$

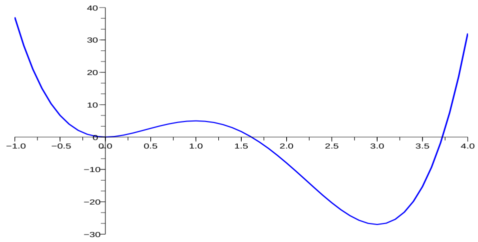

FIG. 1 – La fonction $f(x) = 3x^4 - 16x^3 + 18x^2$ présente sur $I = [-1, 4]$ trois extrema locaux, $x = 0$ et $x = 3$ (minima), $x = 1$ (maximum). Seul $m = f(3) = -27$ est un minimum global sur I, le maximum global étant atteint à l'extrémité gauche de l'intervalle I, $M = f(-1) = 37$.

Remarque : Cette question des extrema locaux est importante pour les applications car la plupart des algorithmes utilisés pour calculer des extrema globaux conduisent indifféremment vers les extrema locaux aussi bien que les extrema globaux. La présence d'extrema locaux qui ne sont pas les extrema globaux est donc bien souvent le cauchemar des mathematiciens lorsqu'ils font des calculs d'optimisation.

4. Recherche d'extrema :

Lorsqu'on utilise le théorème précédent pour trouver les extrema d'une fonction il convient de le faire avec circonspection : si la fonction n'a pas de tangente horizontale, cela signifie généralement qu'elle n'a pas d'extrema mais cela peut être faux si par exemple la fonction n'est pas dérivable (comme le montre l'exemple de $f(x) = |x|$ qui a bien un minimum global en $x = 0$). A l'inverse si elle a une tangente horizontale il se peut que ce ne soit pas un extremum (comme le montre l'exemple de $f(x) = x^3$ qui n'a ni minimum ni maximum en $x = 0$) mais un simple point d'inflexion.

Quoiqu'il en soit le théorème de Fermat suggère que lorsqu'on recherche les extrema globaux d'une fonction dérivable f il est raisonnable de commencer par localiser les zéros de f' (si on ne peut pas le faire exactement on peut avoir recours pour cela à une méthode d'approximation comme la méthode de Newton) ou les points où f' n'existe pas. Ces points qu'on appelle *points critiques* de f fournissent tous les candidats *intérieurs* au domaine et les extrema cherchés sont soit l'un d'eux soient situés *en bordure* du domaine. C'est le sens du résultat suivant, appelé *méthode en trois étapes*, qui fournit une procédure à la fois simple et efficace pour trouver les extrema globaux d'une fonction sur un intervalle $[a, b]$.

Méthode en trois étapes :

Pour trouver le maximum global et le minimum global d'une fonction dérivable f sur un intervalle $[a, b]$, on procèdera de la façon suivante :

1. Trouver les points critiques appartenant à l'intervalle et calculer la valeur de f en ces points.
2. Calculer les valeurs de f aux extrémités de $[a, b]$, c'est-à-dire calculer $f(a)$ et $f(b)$.
3. La plus grande valeur trouvée aux deux étapes précédentes est le maximum global de f et la plus petite son minimum global.

Remarque : Pour les applications, la fonction f est appelée *critère* (à *optimiser*) et les deux inégalités $x \leq b$ et $x \geq a$ sont les *contraintes* du problème d'optimisation. Lorsque le maximum ou le minimum cherché est atteint en un point de $]a, b[$, on dit qu'il *ne sature pas les contraintes ;* c'est alors un extremum local ; lorsqu'il est atteint aux extrémités de l'intervalle, on dit qu'il *sature* l'une des contraintes. Dans ce cas, ce n'est pas un extremum local.

Exemple : Un chevrier dispose d'une clôture mobile pour parquer ses chèvres dans un grand pré. La longueur maximale de sa clôture est de $240m$ et il veut que son enclos soit rectangulaire et de surface maximale. Quelle sera la largeur et la longueur de l'enclos ?

Solution : Si x et y sont respectivement la longueur et la largeur cherchées, le problème consiste à maximiser l'aire qui vaut xy sachant que $2x + 2y = 240$ et on a certainement $0 \leq x \leq 120$ (pourquoi ?). De l'égalité $2x + 2y = 240$, on tire $y = 120 - x$. On peut donc reformuler le problème en les termes suivants : trouver le maximum de la fonction $f(x) = x(120 - x)$ sur l'intervalle $[0, 120]$. La méthode en trois étapes conduit alors à $x^* = 60$.