Analyse : notes du cours 5
Récriproque (ou inverse) d'une fonction

1. Qu'est-ce que la réciproque d'une fonction ?

La réciproque (ou l'inverse) d'une fonction $x \mapsto f(x)$ est une fonction $x \mapsto g(x)$ telle que $g(f(x)) = x$ pour tout x du domaine où la fonction f est définie. En d'autres termes, lorsque l'on applique au nombre x successivement f puis g, on obtient $f(x)$, puis $g(f(x))$ et on doit être revenu au point de départ puisque $g(f(x))$ doit être égal à x. En fait, on demandera aussi que pour un x appartenant au domaine de g, on ait $f(g(x)) = x$. La notation habituelle pour la réciproque de f est $g = f^{-1}$ et si g est la réciproque de f, alors f est aussi la réciproque de g.

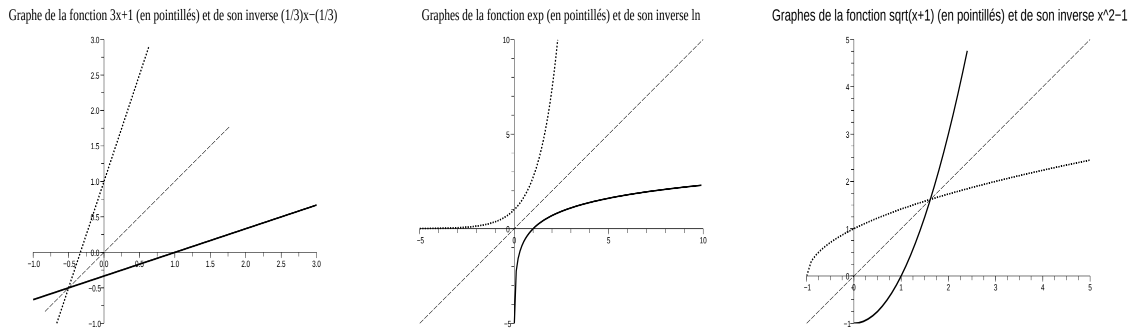
La dénomination d'inverse (utilisée indifféremment pour réciproque) et la notation f^{-1} est un piège (dans lequel il ne faut pas tomber !). En effet, on dit aussi que le nombre $\frac{1}{3}$ est l'inverse du nombre 3 et on le note parfois 3^{-1}. Mais l'inverse d'une fonction, comme par exemple $x \mapsto 3x + 1$ *n'est pas* $\frac{1}{3x+1}$, car ce n'est pas *le nombre* $3x + 1$ que l'on inverse mais la *fonction* $x \mapsto 3x + 1$. Pour calculer cette inverse-là, on résout l'équation $y = 3x + 1$ en exprimant x en fonction de y, ici $y - 1 = 3x$, et donc $x = \frac{y-1}{3} = \frac{1}{3}y - \frac{1}{3}$. On en déduit que $x \mapsto g(x) = \frac{1}{3}x - \frac{1}{3}$ est la réciproque de f (ou bien son inverse) et on peut le vérifier en calculant $g(f(x)) = g(3x+1) = \frac{1}{3}(3x+1) - \frac{1}{3} = x$ et aussi $f(g(x)) = f(\frac{1}{3}x - \frac{1}{3}) = 3(\frac{1}{3}x - \frac{1}{3}) + 1 = x$.

Définition : Soient I et J deux intervalles. Deux fonctions $f : I \to \mathbb{R}$ et $g : J \to \mathbb{R}$ vérifiant $J = f(I)$ et $I = g(J)$ sont réciproques l'une de l'autre si l'on a pour tout $x \in I$ et tout $y \in J$,

$$y = f(x) \quad \Leftrightarrow \quad x = g(y)$$

Voici trois exemples de fonctions f et g réciproques l'une de l'autre et leurs graphes (figure ci-dessous) :

1. Les fonctions $f :]-\infty, +\infty[\to]-\infty, +\infty[$, $f(x) = 3x+1$ et $g :]-\infty, +\infty[\to]-\infty, +\infty[$, $g(x) = \frac{1}{3}x - \frac{1}{3}$.
2. Les fonctions $\exp :]-\infty, +\infty[\to]0, +\infty[$ et $\log :]0, +\infty[\to]-\infty, +\infty[$.
3. Les fonctions $f : [-1, +\infty[\to [0, +\infty[$, $f(x) = \sqrt{x+1}$ et $g : [0, +\infty[\to [-1, +\infty[$, $g(x) = x^2 - 1$.



Ces trois dessins illustrent une propriété géométrique importante : les graphes d'une fonction f et de sa réciproque g sont symétriques par rapport à la première bissectrice $y = x$. En effet, un point du graphe de f a pour coordonnées $(x, f(x))$ et son symétrique par rapport à la première bissectrice s'obtient en échangeant les deux coordonnées $(f(x), x)$. Mais d'après la définition le point $(f(x), x)$ n'est autre que $(y, g(y))$ si g est la réciproque de f, c'est-à-dire un point du graphe de g.

2. Existence d'une fonction réciproque

Certaines fonctions $f : I \to J$ ne possèdent pas de fonction réciproque. Il peut y avoir à cela deux types de causes que nous examinons sur l'exemple de la fonction $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, $x \mapsto \sin x$. Si l'on recherche une réciproque $g : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, il faudrait définir $g(y)$ pour tout $y \in \mathbb{R}$, et c'est évident que ca ne marche pas si $y = 2$ par exemple puisque le nombre $g(2)$ cherché devrait avoir un sinus égal à 2.Ici le problème vient du fait que l'image de $\mathbb{R}$ par la fonction sinus n'est pas $\mathbb{R}$ mais seulement $[-1, +1]$. On dit que $\sin : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ est une fonction qui n'est pas *surjective*[1]. Mais le défaut de surjectivité n'est pas une réelle difficultée dans la construction d'une réciproque car si $f : I \to J$ n'est pas surjective, il suffit de ne chercher à définir la fonction réciproque g que sur $f(I)$ et non sur $\mathbb{R}$ tout entier.

[1]On dit que $f : I \to J$ est *surjective* si pour tout $y \in J$, il existe $x \in I$ tel que $f(x) = y$.

La seconde cause est en fait plus sérieuse. Si l'on cherche à définir une fonction réciproque $g(y)$ à la fonction sinus, même en se restreignant aux $y \in [-1,+1]$, on s'aperçoit qu'il y a non pas une mais plusieures possibilités pour le choix du nombre $g(y)$: tous les nombres dont le sinus vaut la valeur y. Chacun de ces nombres mériterait d'être choisi comme image de y par la réciproque g. On dit qu'une telle fonction n'est pas *injective*[2] parce qu'il y a des nombres distincts qui ont la même image par cette fonction. A noter que lorsqu'une fonction est strictement croissante ou strictement décroissante alors elle est forcément injective (pourquoi ?).

Une fonction à la fois injective et surjective s'appelle *bijective*. Pour possèder une fonction réciproque il est nécessaire et suffisant d'être bijective.

Géométriquement, il est souvent facile de décider, à l'examen de son graphe, si une fonction est surjective, injective, bijective. C'est **le test de la ligne horizontale :** une fonction $f : I \to J$ est surjective (resp. injective, resp. bijective) si et seulement si toute ligne horizontale d'ordonnée appartenant à J coupe le graphe en un point au moins (resp. en un point au plus, resp.en exactement un point). Le test de la ligne horizontale montre facilement que les fonctions sinus et cosinus ne sont ni injectives ni surjectives, tout comme $xmapstox^2$. Par contre $xmapstoax + b$ est bijective pourvu que $a \neq 0$ et $\exp : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ est injective et non surjective.

Mais, en pratique, il sera plus commode de substituer à ce test géométrique le théorème suivant qui indique des conditions suffisantes pour l'existence de la réciproque d'une fonction.

Théorème 1 *Toute fonction $f : I \to J$ continue et strictement croissante vérifiant $J = f(I)$ possède une fonction réciproque $g : J \to I$ continue et strictement croissante. Si de plus f est dérivable sur I et si f' ne s'annule pas alors g est dérivable sur J et sa dérivée s'exprime à l'aide de celle de f par la formule suivante valable pour tout $y \in J$:*

$$g'(y) = \frac{1}{f'(g(y))}. \tag{1}$$

Ce théorème reste vrai si l'on remplace strictement croissante par strictement décroissante.

Nous ne démontrons pas ce théorème ici. Le plus important est d'apprendre à l'utiliser dans des situations concrètes comme nous allons le faire ci-dessous pour les fonctions trigonométriques et les fonctions hyperboliques. Pour plus d'information sur sa démonstration, nous renvoyions au livre de terminal où elle est esquissée (en faisant usage du théorème de la valeur intermédiaire et en construisant des suites adjacentes) et surtout aux cours d'Analyse en ligne comme par exemple celui de Giroux page 67,

http ://www.dms.unmontreal.ca/∼ giroux/documents/analyse100.pdf

Notons seulement qu'une fois démontrée la dérivabilité de g, la formule (1) s'obtient par simple application de la formule de dérivation des fonctions composées. En effet on a d'une part $(g \circ f)' = (x \mapsto x)' = 1$ et d'autre part $(g \circ f)' = g'(f)f'$. Donc $g'(f(x))f'(x) = 1$, d'où la formule (en remplaçant simplement $f(x)$ par y et x par $g(y)$) :

3. Réciproques des fonctions trigonométriques (ou circulaires)

On peut appliquer ce théorème à bien des fonctions usuelles et construire ainsi nombre de nouvelles fonctions. Par exemple, à partir de $f(x) = x^3$, strictement croissante sur tout $\mathbb{R}$, on construit la fonction racine cubique qui, au contraire de la racine carrée, sera définie sur $\mathbb{R}$ tout entier. Pour des fonctions non monotones, comme les fonctions sinus ou cosinus, l'application de ce théorème ne peut se faire que si l'on restreint la fonction f à un intervalle I où elle est monotone. En général, ceci peut se faire de nombreuses façons différentes, nous donnons ici les définitions usuelles.

De l'intervalle $I = [-\pi/2, \pi/2]$ dans l'intervalle $J = [-1, 1]$ la fonction sinus est une bijection (continue et strictement croissante), son inverse s'appelle l'Arcsinus, noté $x \mapsto \mathrm{Arc}\sin(x)$. En procédant de la même façon, on définit les fonctions réciproques du cosinus et de la tangente :

- Pour tout $x \in [-\pi/2, \pi/2]$ et tout $y \in [-1, 1]$, on a $y = \sin(x) \Leftrightarrow x = \mathrm{Arc}\sin(y)$.
- Pour tout $x \in [0, \pi]$ et tout $y \in [-1, 1]$, on a $y = \cos(x) \Leftrightarrow x = \mathrm{Arc}\cos(y)$.
- Pour tout $x \in [-\pi/2, \pi/2]$ et tout $y \in [-\infty, \infty]$, on a $y = \tan(x) \Leftrightarrow x = \arctan(y)$.

La formule (1) permet aussi de calculer les dérivées de ces fonctions :

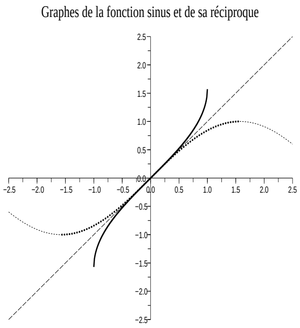
$$\mathrm{Arc}\sin'(x) = \frac{1}{\sqrt{1-x^2}} \ \ , \ \ \mathrm{Arc}\cos'(x) = -\frac{1}{\sqrt{1-x^2}} \ \ , \ \ \arctan'(x) = \frac{1}{1+x^2}$$

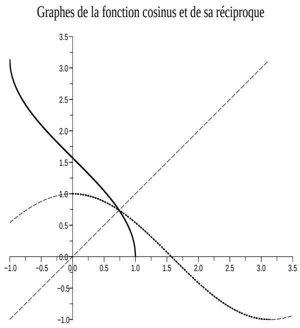
4. Fonctions hyperboliques et leurs réciproques

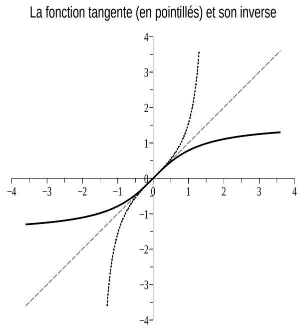
La formule suivante, vue en terminale sous le nom de *notation exponentielle des nombre complexes*, aussi connue sous le nom de formule d'Euler

$$z = \rho e^{i\theta} = \rho(\cos\theta + i\sin\theta)$$

[2]On dit que $f : I \to J$ est *injective* si pour tout $x \in I$ et $x' \in I$, $x \neq x'$ implique $f(x) \neq f(x')$.







permet d'exprimer les fonctions trigonométriques en fonction de l'exponentielle complexe $e^{i\theta}$, ce qui est souvent bien utile :

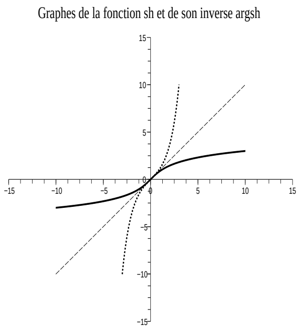
$$\sin\theta = \frac{e^{i\theta} - e^{-i\theta}}{2i} \quad , \quad \cos\theta = \frac{e^{i\theta} + e^{-i\theta}}{2} \quad , \quad \operatorname{tg}\theta = \frac{sin\theta}{\cos\theta}$$

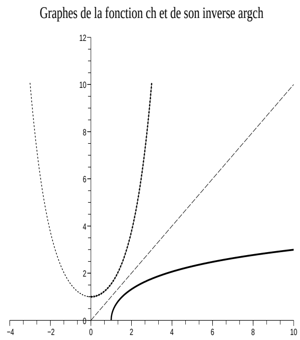
C'est au moyen de formules analogues que l'on va définir à présent de nouvelles fonctions appelées *fonctions hyperboliques*.

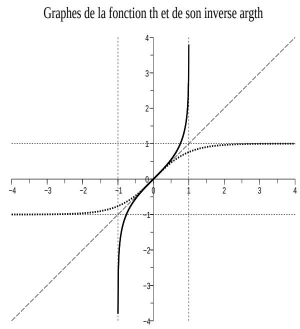
Définition : Les formules suivantes définissent des fonctions que l'on appelle respectivement *sinus hyperbolique*, *cosinus hyperbolique* et *tangente hyperbolique* :

$$\operatorname{sh} x = \frac{e^x - e^{-x}}{2} \quad , \quad \operatorname{ch} x = \frac{e^x + e^{-x}}{2} \quad , \quad \operatorname{th} x = \frac{\operatorname{sh} x}{\operatorname{ch} x}$$

On définit leurs réciproques appelées Argsh , Argch et Argth par :
- Pour tout $x \in \mathbb{R}$ et tout $y \in \mathbb{R}$, on a $y = \operatorname{sh}(x) \Leftrightarrow x = \operatorname{Argsh}(y)$
- Pour tout $x \in [0, +\infty[$ et tout $y = [-1, +\infty[$, on a $y = \operatorname{ch}(x) \Leftrightarrow x = \operatorname{Argch}(y)$
- Pour tout $x \in \mathbb{R}$ et tout $y =]-1, 1[$, on a $y = \operatorname{th}(x) \Leftrightarrow x = \operatorname{Argth}(y)$







La formule (1) permet aussi de calculer les dérivées de ces fonctions :

$$\operatorname{Argsh}'(x) = \frac{1}{\sqrt{x^2+1}} \quad , \quad \operatorname{Argch}'(x) = \frac{1}{\sqrt{x^2-1}} \quad , \quad \operatorname{Argth}'(x) = \frac{1}{1-x^2}$$

Remarque : Le nom de fonction hyperbolique vient du fait que l'hyperbole joue pour ces fonctions le même rôle que le cercle pour les fonctions trigonométriques (aussi appelées fonctions circulaires). Pour plus de détails voir `http ://fr.wikipedia.org/wiki/Fonction_hyperbolique` ou la page suivante extraite du livre *Calculus* de J. Stewart. Elle montre que ces fonctions s'écrivent sinh, cosh et tanh en anglais et qu'il existe des formules hyperboliques analogues aux formules trigonométriques bien connues. A noter qu'on y désigne aussi la fonction $\frac{1}{\operatorname{ch}}$ sous le nom de sécante hyperbolique (notée `sech`).