Université de Nice
Département de Mathématiques

Année 2007-2008
Licence MI/SM 1e année

Analyse : notes du cours 8
Intégrales (suite)

L'objet de ce chapitre est de présenter quelques méthodes numériques de calcul d'intégrales, c'est-à-dire des algorithmes qui peuvent être utilisés lorsqu'un calcul exact de l'intégrale avec une primitive (théorème fondamental) est impossible ou non approprié. Mais avant cela nous apprendrons, dans le premier paragraphe, comment on peut calculer à l'aide d'une intégrale la longueur d'un arc de courbe, lorsque cette courbe est le graphe d'une fonction $x \mapsto f(x)$.

1. Longueur d'une courbe

Si P_1 et P_2 sont deux points du plan de coordonnées (x_1, y_1) et (x_2, y_2) respectivement on sait calculer la longueur du segment qui les joint $\|P_1P_2\|$ en utilisant le théorème de Pythagore :

$$\|P_1P_2\| = \sqrt{(x_2 - x_1)^2 + (y_2 - y_1)^2}.$$

On peut aussi calculer, à l'aide de cette formule, la longueur de n'importe quelle ligne polygonale $P_1P_2P_3 \dots P_n$, simplement en ajoutant les longueurs de segments qui la composent. Pour calculer la longueur d'une courbe

$$\mathcal{C} = \{(x, y), a \le x \le b, y = f(x)\},$$

graphe d'une fonction $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, l'idée est de considérer une subdivision (x_i) de l'intervalle $[a, b]$ (c'est-à-dire une suite (x_i) de $n + 1$ éléments de $[a, b]$ telle que $a = x_0 < x_1 < \dots < x_n = b$) comme indiqué sur la figure , afin d'obtenir une approximation de la courbe par une ligne polygonale $P_0P_1P_2P_3 \dots P_n$. Les fonctions dont les graphes sont des lignes polygonales s'appellent des *fonctions linéaires par morceaux.* On approche donc la fonction f par une fonction (linéaire par morceaux) dont on sait calculer la longueur :

$$\sum_{i=0}^{n-1} \sqrt{(x_{i+1} - x_i)^2 + (f(x_{i+1}) - f(x_i))^2}. \tag{1}$$

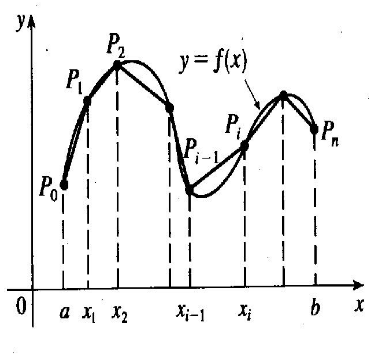


FIG. 1 – Approximation de la longueur d'un arc de courbe par celle d'une ligne polygonale.

C'est à partir d'approximations de f par des fonctions linéaires par morceaux de plus en plus fines (en faisant tendre vers 0 la taille des intervalles de la subdivision) que l'on peut établir le résultat suivant :

Théorème 1 *Soit $f : [a, b] \to \mathbb{R}$ dérivable, de dérivée continue. La longueur de l'arc de courbe $\mathcal{C} = \{(x, y), a \le x \le b, y = f(x)\}$ est égale à l'intégrale $\int_a^b \sqrt{1 + f'^2(x)}dx$.*

Exemple : Calculons la longueur de l'arc de courbe qui a pour équation $y = \frac{x^3}{6} + \frac{1}{2x}$ pour $1 \le x \le 2$. Pour $f(x) = \frac{x^3}{6} + \frac{1}{2x}$, on a $f'x) = \frac{x^2}{2} - \frac{1}{2x^2}$. D'où

$$\int_1^2 \sqrt{1 + (f'(x))^2}dx = \int_1^2 \sqrt{1 + \left(\frac{x^2}{2} - \frac{1}{2x^2}\right)^2}dx = \int_1^2 \sqrt{\left(\frac{x^2}{2} + \frac{1}{2x^2}\right)^2}dx = \left[\frac{x^3}{6} + \frac{1}{2x}\right]_1^2 = \frac{17}{12}.$$

Nous ne donnons pas ici la preuve du théorème précédent mais seulement l'idée de cette preuve.

Supposons que la subdivision (x_i) de l'intervalle $[a, b]$ soit une subdivision régulière en n intervalles égaux, c'est-à-dire supposons que $x_i = a + i\frac{(b-a)}{n}$ et évaluons la longueur de la ligne polygonale correspondante (1). Si n est assez grand, l'approximation linéaire de f n'est pas une trop mauvaise approximation entre les points x_i et x_{i+1} qui sont alors très proches. L'idée est de remplacer dans cette formule $f(x_{i+1})$ par $L(x_{i+1}) = f(x_i) + f'(x_i)(x_{i+1} - x_i)$. Si l'on fait cela, (1) devient :

$$\sum_{i=0}^{n-1} \sqrt{(x_{i+1} - x_i)^2 \left(1 + (f(x_i))^2\right)} = \sum_{i=0}^{n-1} \sqrt{(1 + f^2(x_i))}\,(x_{i+1} - x_i)\,.$$

On reconnait alors dans cette somme, la somme de Riemann régulière à gauche

$$S_n = \frac{b-a}{n} \sum_{i=0}^{i=n-1} f\left(a + \frac{i}{n}(b-a)\right)$$

pour la fonction $f(x) = \sqrt{1 + (f'(x))^2}$. Si l'on peut s'assurer (ce qui resterait à faire) que la somme des erreurs commises en remplaçant la fonction f par sa linéarisée tend bien vers zéro lorsque n tend vers l'infini, on peut alors en déduire le résultat cherché puisque cette somme de Riemann converge vers l'intégrale $\int_a^b \sqrt{1 + f'^2(x)}dx$ puisqu'on a supposer f continue.

2. Méthodes des rectangles

Revenons maintenant au calcul d'intégrale. Il y a de nombreuses situations où le calcul d'une intégrale à l'aide d'une primitive de la fonction à intégrer, n'est pas possible, tout simplement parce qu'on ne connait pas de primitive de cette fonction. En réalité, c'est le cas le plus souvent dans les applications. Il faut alors utiliser un algorithme permettant de calculer une valeur approchée de l'intégrale. Il existe de nombreux algorithmes pour cela ; nous présentons ici les plus connus.

Considérons une fonction $f : [a, b] \to \mathbb{R}$ continue, et désignons par I son intégrale $I = \int_a^b f(x)dx$. Pour calculer une approximation du nombre I (qui représente l'aire de la région du plan comprise entre l'axe des x et le graphe de f), l'idée la plus simple est de considérer une somme de Riemann.

C'est la méthode dite *des rectangles* qui est la plus rudimentaire des méthodes de calcul approché d'intégrale. En réalité il y en a deux, la méthode des rectangles à gauche et la méthode des rectangles à droite, comme illustrées par la figure suivante.

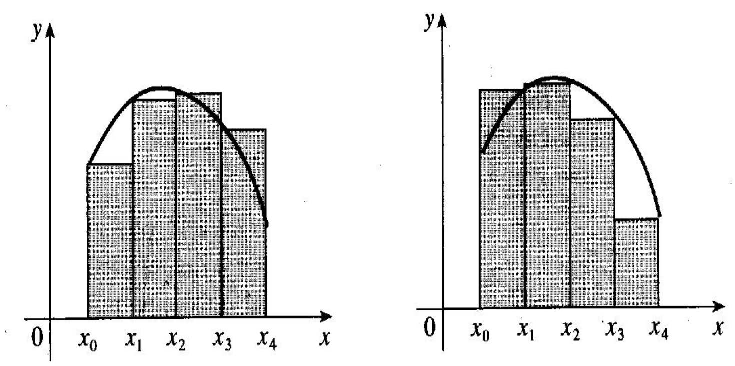


FIG. 2 – Approximation de l'intégrale $\int_a^b f(x)dx$ par la méthode des rectangles à gauche (sommets gauches des rectangles situés sur le graphe de f) et par la méthode des rectangles à droite (sommets droits des rectangles situés sur le graphe de f).

Elles conduisent aux formules suivantes :

$$\boxed{S_n^g = f(x_0)\Delta x + f(x_1)\Delta x + \ldots + f(x_{n-1})\Delta x = \textstyle\sum_{i=1}^n f(x_{i-1})\Delta x}$$

$$\boxed{S_n^d = f(x_1)\Delta x + f(x_2)\Delta x + \ldots + f(x_n)\Delta x = \textstyle\sum_{i=1}^n f(x_i)\Delta x}$$

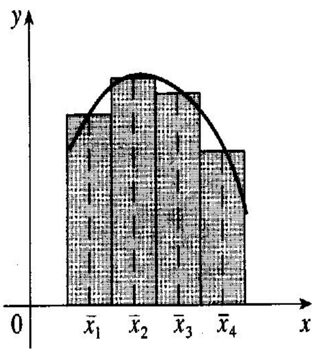
où $a = x_0 < x_1 < \ldots < x_n = b$ est une subdivision régulière de l'intervalle $[a, b]$ et $\Delta x = x_{i+1} - x_i = \frac{b-a}{n}$. Les deux quantités S_n^g et S_n^d sont deux approximations de I. E effet, on a dejà dit que, lorsque n tend vers l'infini, la suite S_n^g converge vers le nombre I, donc, lorsque n est suffisamment grand, la quantité

S_n^g fournit une bonne approximation de I. C'est le cas aussi de S_n^d. En examinant de plus près leurs expressions, on s'aperçoit qu'en fait ces deux sommes ont exactement les mêmes termes à l'exception du premier $f(x_0)\Delta x$ qui n'est présent que dans la première et du dernier $f(x_n)\Delta x$ qui n'est en fait présent que dans la seconde. On peut aussi noter que sur un intervalle $[a, b]$ où f serait croissante la quantité S_n^g sous estime I et S_n^d la sur estime. L'inverse est vrai pour les même raisons sur un intervalle où f serait décroissante.

Néanmoins, la présence de termes de bord, disymétriques, qui peuvent avoir une influence non négligeable sur l'approximation apparaît comme un point faible de ces deux méthodes des rectangles qu'on va chercher à corriger à travers les deux méthodes suivantes.

3. Méthode du point milieu et méthode des trapèzes

La méthode du point milieu, illustrée sur la figure suivante (à gauche), est encore une méthode des rectangles mais la hauteur des rectangles n'est plus cette fois l'une des deux extrémités gauche $f(x_i)$ ou droite $f(x_{i+1})$ mais la hauteur au milieu de l'intervalle $f(\overline{x}_i)$, où $\overline{x}_i = (x_{i-1} + x_i)/2$. On obtient



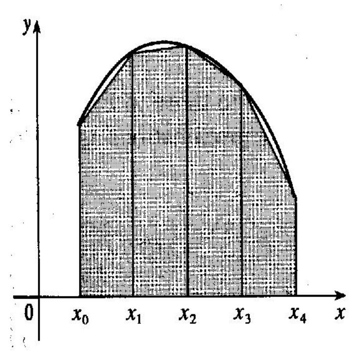


FIG. 3 – Approximation par la méthode du point milieu et par la méthode des trapèzes.

l'approximation M_n suivante pour I :

$$\boxed{M_n = f(\overline{x}_0)\Delta x + f(\overline{x}_1)\Delta x + \ldots + f(\overline{x}_{n-1})\Delta x = \textstyle\sum_{i=1}^{n} f(\overline{x}_i)\Delta x}$$

où $\overline{x}_i = (x_{i-1} + x_i)/2$ est le milieu de l'intervalle $[x_{i-1}, x_i]$ et $\Delta x = x_{i+1} - x_i = \frac{b-a}{n}$. On verra ultérieurement que la méthode du point milieu est non seulement plus naturelle que les deux méthodes des rectangles mais qu'elle fournit aussi une meilleure approximation de l'intégrale.

Une autre méthode, de qualité comparable, approche la surface dont on veut évaluer l'aire par une somme de trapèzes, comme indiqué sur la figure (à droite). L'aire d'un trapèze dont la base est le segment $[x_i, x_{i+1}]$ est égale à

$$(x_i - x_{i-1})\left(\frac{f(x_{i-1}) + f(x_i)}{2}\right) = \frac{\Delta x}{2}(f(x_{i-1}) + f(x_i)).$$

En faisant la somme de tous les trapèzes concernés, on constate que les termes $f(x_i)$ apparaissent deux fois sauf le premier $f(x_0)$ et le dernier $f(x_n)$. D'où la formule suivante :

$$\boxed{T_n = f(x_0)\tfrac{\Delta x}{2} + 2f(x_1)\tfrac{\Delta x}{2} + \ldots + 2f(x_{n-1})\tfrac{\Delta x}{2} + f(x_n)\tfrac{\Delta x}{2} = \tfrac{\Delta x}{2}\left(f(x_0) + 2\textstyle\sum_{i=1}^{n-1} f(x_i) + f(x_n)\right)}$$

où $\Delta x = x_{i+1} - x_i = \frac{b-a}{n}$.

Exemple : Calculons avec la méthode du point milieu, puis avec celle des trapèzes, l'intégrale $\int_1^2 \frac{dx}{x}$ en choisissant $n = 5$. Comme $b - a = 2 - 1$, $\Delta x = \frac{1}{5} = 0,2$. On a :

$$M_5 = (0.2)(f(1,1) + f(1,3) + f(1,5) + f(1,7) + f(1,9))$$

$$M_5 = (0.2)\left(\frac{1}{1,1} + \frac{1}{1,3} + \frac{1}{1,5} + \frac{1}{1,7} + \frac{1}{1,9}\right) = 0,691908$$

De la même façon, en utilisant cette fois la méthode des trapèzes,

$$T_5 = \frac{0,2}{2}(f(1) + 2f(1,2) + 2f(1,4) + 2f(1,6) + 2f(1,8) + f(2))$$

$$T_5 = 0,1\left(\frac{1}{1} + \frac{2}{1.2} + \frac{2}{1.4} + \frac{2}{1.6} + \frac{2}{1.8} + \frac{1}{2}\right) = 0,695635$$

Il est facile de vérifier que la valeur exacte de cette intégrale est $\ln 2$, c'est-à-dire environs $0,693147$. On constate que l'erreur (différence entre la valeur exacte et son approximation) est assez faible, même avec $n = 5$ qui n'est pas une très grande valeur pour n. Elle est à peu près deux fois plus grande pour la méthode des trapèzes que pour la méthode du point milieu. En fait, nous verrons ultérieurement que l'on peut encore nettement améliorer la précision de l'approximation si l'on remplace les segments de droite des trapèzes par des segments de paraboles (méthode de Simpson[1]).

4. Méthode de Monté-Carlo

Les méthodes précédentes conduisent finalement toutes à calculer n valeurs de la fonction à intégrer f dans l'intervalle d'intégration $[a, b]$ et à calculer une moyenne pondérée de ces valeurs.

La principale différence d'une méthode sur l'autre est dans le choix des coefficients. La méthode de Monté-Carlo que nous proposons à présent est à la fois très différente dans son esprit mais elle reprend cette idée de moyenne pondérée. L'idée est de tirer au hasard n valeurs de x uniformément réparties dans l'intervalle [a,b], désignons par $\xi_1, \xi_2, \ldots, \xi_n$ ces nombres choisis au hasard, et de calculer la moyenne arithmétique (le même coefficient pour tous) des valeurs de la fonctions f en ces points. Cela donne la formule suivante :

$$\boxed{MC_n = \frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n} f(\xi_i), \text{ où les } \xi_i \text{ sont le résultat de } n \text{ tirages aléatoires uniformes dans } [a, b].}$$

C'est l'un des plus beau théorème du calcul des probabilités, appelé *la loi des grands nombres*, qui permet de montrer que lorsque n tend vers l'infini la suite MC_n va tendre vers le nombre $\frac{1}{b-a}\int_a^b f(x)dx$. Plus exactement, cette suite étant cette fois une suite aléatoire, et non une suite ordinaire (on dit *déterministe*) comme le sont les suites S_n^g, S_n^d, M_n ou T_n étudiées précédemment, on dira que plus on tire de nombres ξ_i dans $[a, b]$, moins on a de risque de tomber loin du nombre $\frac{1}{b-a}\int_a^b f(x)dx$ lorsqu'on calcule la valeur MC_n.

Cette méthode de Monté-Carlo a été appelée ainsi par ses inventeurs en référence au Casino de Monté-Carlo. Il peut sembler surprenant qu'en procédant de cette façon on obtienne un algorithme efficace. En realité, pour le calcul d'intégrales simples comme celle d'une fonction $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, l'algorithme de Monté-Carlo n'est pas, de loin, le plus performant. Mais il est l'exemple le plus simple d'une grande famille d'algorithmes qu'on appelle *algorithmes stochastiques* qui sont particulièrement utiles dans de nombreux domaine d'application comme la biologie, la finance ou l'assurance lorsque les intégrales (ou les espérances) que l'on veut calculer sont impossibles ou très difficiles à calculer par d'autres méthodes. La mise au point d'algorithmes stochastiques, plus performants que ceux dont on dispose déjà, est un domaine de recherche particulièrement actif en ce moment. Avis aux amateurs.

Un autre avantage de la méthode de Monté-Carlo sur les autres méthodes décrites ici est le suivant. Si, pour atteindre une précision supérieure par exemple, on décide d'augmenter n (de passer de $n = 1000$ à $n = 1500$ par exemple) alors les calculs dejà effectués sont perdus avec les méthodes classiques alors qu'avec l'approche Monté-Carlo, il suffit de poursuivre les calculs en effectuant les tirages supplémentaires nécessaires sans rien perdre des tirages dejà effectués.

[1] La méthode de Simpson, nous le verrons en exercice, conduit à la moyenne pondérée $\frac{\Delta x}{3}\left(f(x_0) + 4f(x_1) + 2f(x_2) + 4f(x_3) + \ldots + 2f(x_{n-2}) + 4f(x_{n-1}) + f(x_n)\right)$.