Université de Nice
Département de Mathématiques

Année 2007-2008
Licence MI/SM 1e année

**Analyse : notes du cours 9**
**Accroissements finis**

Dans ce cours sont réunis trois résultats fondamentaux d'analyse, connus respectivement sous le nom d'*égalité de accroissements finis*, d'*inégalité des acroissements finis* et de *théorème de la valeur moyenne.* Ce sont de puissants outils de calcul qui notamment permettent de démontrer des propriétés d'une fonction à partir de propriétés de la dérivée de cette fonction.

**1. Théorème de Rolle** Le théorème de Rolle est le résultat de base dont découlent les trois autres. On en perçoit immédiatement le sens sur un dessin (voir la figure **??** ci-dessous).

**Théorème 1** *Soit* $f : [a,b] \to \mathbb{R}$ *une fonction dérivable. Si* $f(a) = f(b)$ *alors il existe* $c \in ]a,b[$ *tel que* $f'(c) = 0$.

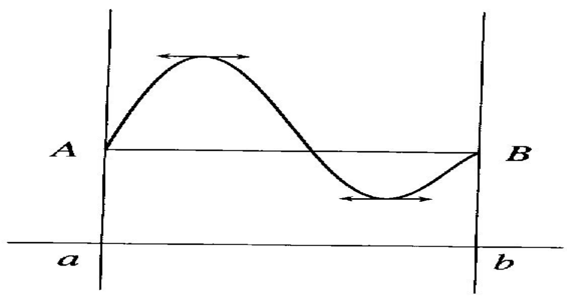


FIG. 1 – Illustration du théorème de Rolle

**Preuve :** La démonstration de ce théorème utilise les théorèmes 1 et 2 du Cours 2 consacré aux extréma de fonctions. Le premier théorème affirme l'existence d'un minimum et d'un maximum au moins dans $[a,b]$ pour toute fonction $f : [a,b] \to \mathbb{R}$ pourvu qu'elle soit continue, ce qui est bien le cas ici puisqu'on a supposé $f$ dérivable. Le second théorème (théorème de Fermat) établit qu'une fonction dérivable ayant un extrémum local en un point a une dérivée nulle en ce point. Il reste donc à montrer que l'un des extréma de $f$ au moins est distinct des extrémités $a$ et $b$ et ce sera le point $c$ cherché. Supposons par exemple que $f$ ait un minimum unique à l'une des extrémités de $[a,b]$ , disons en $a$. Dans ce cas, comme $f(a) = f(b)$ le maximum ne peut être en $b$ sauf si $f$ est une fonction contante. Si $f$ est constante, sa dérivée est nulle en tout point (le point $c$ cherché est alors n'importe quel point de $]a,b[$). Si $f$ n'est pas constante, son maximum est atteint en un point $c \in ]a,b[$. □

**2. Egalité des accroissements finis**

On généralise facilement le théorème de Rolle en "penchant" simplement la figure précédente (voir la figure **??** ci-dessous) : on obtient alors l'égalité des accroissement finis :

**Théorème 2** *Soit* $f : [a,b] \to \mathbb{R}$ *une fonction dérivable. Alors il existe* $c \in ]a,b[$ *tel que* $f'(c) = \frac{f(b)-f(a)}{b-a}$.

**Preuve :** Considérons la fonction $g(x) = f(x) - \frac{f(b)-f(a)}{b-a}(x-a)$ et appliquons à $g$ le théorème de Rolle. On s'assure pour cela que $g$ est bien dérivable sur l'intervalle $[a,b]$ et que $g(a) = g(b)$. Il en résulte l'existence d'une valeur $c \in ]a,b[$ telle que $g'(c) = 0$. Mais $g'(c) = 0$ s'écrit précisément $f'(c) = \frac{f(b)-f(a)}{b-a}$. □

Le plus souvent on utilise l'égalité des accroissements finis pour évaluer l'accroissement d'une fonction $f$ entre $a$ et $b$ en fonction de l'accroissement de $x$, qui vaut $b-a$, et de la dérivée de $f$ :

$$f(b) = f(a) + (b-a)f'(c) \quad , \quad c \in ]a,b[ \tag{1}$$

Les deux corollaires suivants sont des résultats classiques que l'on démontre en utilisant (1).

**Corollaire 3** *Si* $f'(x) = 0$ *pour tout* $x \in [a,b]$ *alors* $f$ *est constante.*

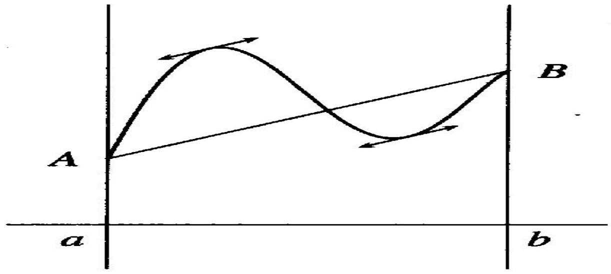


FIG. 2 – Illustration de l'égalité des accroissements finis

**Preuve :** Pour tous $x$ et $\overline{x}$ dans $[a,b]$, l'égalité des accroissements finis $f(x) - f(\overline{x}) = f'(c)(x - \overline{x})$ entraine que $f(x) - f(\overline{x}) = 0$ puisque $f'(c) = 0$ par hypothèse. Et donc, pour tous $x$ et $\overline{x}$ dans $[a,b]$, $f(x) = f(\overline{x})$, d'où l'on déduit que $f$ est bien constante. □

**Corollaire 4** *Si $F(x)$ et $G(x)$ sont deux primitives d'une même fonction $f$, alors $F(x) = G(x) + C^{ste}$.*

**Preuve :** Comme $F(x)$ et $G(x)$ sont deux fonctions dont la dérivé vaut $f$, leur différence $F - G$ est une fonction ayant une dérivée nulle. Elle est donc constante. □

### 3. Inégalité des accroissements finis

**Théorème 5** *Soit $f : [a,b] \to \mathbb{R}$ une fonction dérivable. Supposons que la dérivée $f'$ vérifie $|f'(x)| \leq M$ sur $[a,b]$. Alors, pour tout $x, \overline{x} \in [a,b]$, on a :*

$$|f(x) - f(\overline{x})| \leq M|x - \overline{x}|. \tag{2}$$

**Preuve :** La démonstration de cette inégalité est une simple application de l'égalité des accroissements finis. En effet $|f(x) - f(\overline{x})| = |f'(x)(x - \overline{x})| = |f'(x)||x - \overline{x}| \leq M|x - \overline{x}|$. □

**Exercice 1** *Considérons une fonction dérivable $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ telle que $f(0) = -3$ et $|f'(x)| \leq 5$ pour tout $x$. Quelle est la plus grande valeur que peut prendre cette fonction en $x = 2$ ?*

*D'après l'inégalité des accroissements finis (2), on a $|f(2) - f(0)| \leq 5|2 - 0|$, soit $|f(2) + 3| \leq 10$. La plus grande valeur possible pour $f(2)$ est donc 7.*

Parmi ses nombreuses utilisations, signalons que l'inégalité des accroissements finis permet notamment de calculer des bornes pour les erreurs entre valeurs approchées et valeurs exactes de méthodes numériques. A titre d'exemple, voici comment l'on peut contrôler la vitesse de convergence de la méthode des rectangles pour le calcul approché d'intégrales.

**Proposition 6** *Supposons que $f$ soit dérivable sur $[a,b]$ et que sa dérivée vérifie $|f'(x)| < M$ pour tout $x \in [a,b]$. Soit $S_n^g$ l'approximation de l'intégrale $I = \int_a^b f(x)dx$ par la méthode des rectangles à gauche. On a alors la borne[1] suivante pour l'erreur d'approximation de l'intégrale :*

$$|S_n^g - I| \leq \frac{M(b-a)^2}{2n}.$$

**Preuve :** L'erreur à évaluer ici $|S_n^g - I|$ est une somme de petites surfaces comprises entre le graphe de $f$ et les hauts des rectangles. Chacune de ces petites surface est très petite lorsque $n$ est grand mais il n'est pas clair pour autant que leur somme reste petite puisque leur nombre, égal à $n$, tend vers l'infini. Pourtant cette somme tend bien vers 0 comme nous allons le montrer.

Calculons cette somme en écrivant d'une part l'aire des rectangles comme des intégrales de fonctions constantes et d'autre part en utilisant la relation de Chasles pour découper l'intégrale sur $[a,b]$ en une somme de $n$ intégrales :

[1] en fait on a aussi des majorations de ce type pour les méthodes des points milieu et des trapèzes : on peut montrer que $|M_n - I| \leq \frac{M(b-a)^3}{24n^2}$ et que $|T_n - I| \leq \frac{M(b-a)^3}{12n^2}$). Il en résulte que l'erreur pour ces deux méthodes est de l'ordre de $\frac{1}{n^2}$, c'est-à-dire bien plus petite, lorsque $n$ tend vers l'infini, que celle de la méthodes des rectangles qui, elle, est de l'ordre de $\frac{1}{n}$. Ceci explique que ces deux méthodes sont plus précises que celle des rectangles.

$$\begin{aligned}
|S_n^g - I| = \sum_{i=1}^n f(x_{i-1})\Delta x - \int_a^b f(x)dx &= \sum_{i=1}^n \left( \int_{x_{i-1}}^{x_i} f(x_{i-1})dx \right) - \sum_{i=1}^n \left( \int_{x_{i-1}}^{x_i} f(x)dx \right) \\
&= \sum_{i=1}^n \left( \int_{x_{i-1}}^{x_i} \left( f(x_{i-1}) - f(x) \right) dx \right)
\end{aligned}$$

On utilise alors l'inégalité triangulaire sur les sommes ainsi que la propritété correspondante pour les intégrale, que l'on peut écrire $|\int g(x)dx| \leq \int |g(x)|dx$. On obtient :

$$|S_n^g - I| \leq \sum_{i=1}^n \left( \int_{x_{i-1}}^{x_i} | \left( f(x_{i-1}) - f(x) \right) | dx \right)$$

On applique alors à chaque termes l'inégalité des accroissements finis $|f(x_{i-1}) - f(x)| \leq M|x_{i-1} - x|$, d'où

$$\begin{aligned}
|S_n^g - I| &\leq \sum_{i=1}^n \int_{x_{i-1}}^{x_i} M|x_{i-1} - x|dx = \sum_{i=1}^n \int_{x_{i-1}}^{x_i} M(x_{i-1} - x)dx \\
&= M \sum_{i=1}^n \int_{x_{i-1}}^{x_i} (x_{i-1} - x)dx = M \sum_{i=1}^n \left[ \frac{(x_{i-1} - x)^2}{2} \right]_{x_{i-1}}^{x_i} = \frac{M}{2} \sum_{i=1}^n (x_{i-1} - x_i)^2 \\
&= \frac{M}{2} n \left( \frac{b-a}{n} \right)^2 = \frac{M(b-a)^2}{2n}.
\end{aligned}$$

□

**4. Théorème de la valeur moyenne**

Une autre version de l'égalité des accroissements finis, également utile dans les applications, est la théorème de la valeur moyenne.

**Théorème 7** *Soit $f : [a,b] \to \mathbb{R}$ une fonction continue. Alors il existe $c \in ]a,b[$ tel que*

$$\int_a^b f(x)dx = f'(c)(b-a).$$

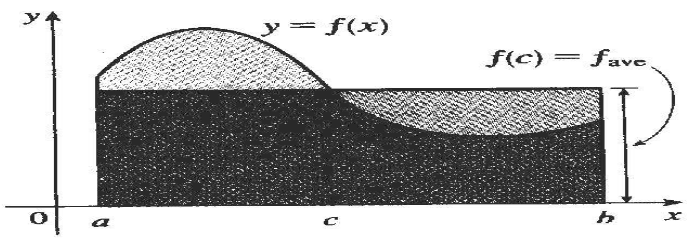


FIG. 3 – Illustration du théorème de la valeur moyenne.

Sur la figure, on voit que ce théorème montre que l'aire sous le graphe de $f$, qui vaut $I = \int_a^b f(x)dx$, est égale à l'aire d'un rectangle de base l'intervalle $[a,b]$ et de hauteur $f(c)$, où $f(c)$ est l'une des valeurs prises par $f$ dans l'intervalle. Cette valeur $f(c)$ s'appelle aussi la valeur moyenne de $f$.

**Définition :** Soit $f : [a,b] \to \mathbb{R}$ continue. On appelle *valeur moyenne* de $f$ sur $[a,b]$, notée $f_{moy}$, le nombre

$$f_{moy} = \frac{1}{b-a} \int_a^b f(x)dx.$$

**Exercice 2** *Trouver la valeur moyenne de $f(x) = 1 + x^2$ sur l'intervalle $[-1, 2]$. Combien de fois est-elle atteinte ?*

*On calcule $f_{moy} = \frac{1}{b-a}\int_a^b f(t)dt = \frac{1}{3}\int_{-1}^{2} 1 + x^2 dx = \frac{1}{3}[x + \frac{x^3}{3}]_{-1}^{2} = \frac{1}{3}(2 + \frac{8}{3} + 1 + \frac{1}{3}) = 2$.*

*Les valeurs de $x$ où $f$ atteint sa valeur moyenne sont alors les solutions de $1 + x^2 = 2$, c'est-à-dire $x = -1$ et $x = 1$. Elles appartiennent l'une et l'autre à l'intervalle $[-1, 2]$. Donc $f$ atteint sa valeur moyenne à deux reprises dans l'intervalle $[a, b]$.*