NOM : .
PRENOM : Groupe : .

**Analyse : Feuille de réponses de l'épreuve finale**
**11 décembre 2007, 16h00-18h00**

Les exercices sont indépendants. Barème indicatif : exercice 1 : 2 points, exercice 2 : 2 points, exercice 3 : 4 points, exercice 4 : 5 points, exercice 5 : 4 points, exercice 6 : 3 points, exercice 7 : 3 points.

Supports autorisés : Une calculatrice et une feuille A4 recto-verso rédigée de la main de l'étudiant.

**Exercice 1. :** Ecrire la définition formalisée des propriétés suivantes :
$f$ est une fonction strictement croissante sur l'intervalle $[a, b]$ :

| |
|---|
| . |

$g$ est une fonction strictement décroissante sur l'intervalle $[a, b]$ :

| |
|---|
| . |

En déduire des bornes, valables pour tout $x \in [a, b]$, pour

$$............ \leq f(x) + g(x) \leq ....................$$

$$............ \leq f(x) - g(x) \leq ....................$$

**Exercice 2. : Question de cours**

Indiquer quelle suite $x_n$, connue sous le nom de méthode de Newton, permet de calculer une approximation du zéro d'une fonction $f$ :

| |
|---|
| $x_n$ est définie par : |

Pour la fonction $f(x) = \frac{1}{4}e^x - 1$, on a obtenu pour $x_0 = 2$ successivement $x_1 \simeq 1,541$ puis $x_2 \simeq 1,398$. Peut-on affirmer que la suite $(x_n)$ est convergente dans ce cas et, si oui, quelle est sa limite ?

**Exercice 3.** **:** Soit $f$ la fonction définie par

$$f_1(x) = \begin{cases} x-1 & \text{si } x < 3 \\ L & \text{si } x = 3 \\ \frac{15-8x+x^2}{3-x} & \text{si } x > 3 \end{cases}$$

Quel est le domaine de définition de $f$ ? Choisir la valeur de $L$ de telle sorte que $f$ soit continue sur son domaine en justifiant la valeur choisie.

Tracer le graphe de $f$.

Calculer de deux façons différentes la valeur de l'intégrale $\int_1^5 f(x)dx$

**Exercice 4.** : On considère la fonction $g(x,y) = y\sqrt{x} - y^2 - x + 6y$.

1. Donner un exemple de point $(x,y)$ appartenant au domaine de définition $g$ puis indiquer quel est ce domaine $\mathcal{D}$.

| $(x,y) =$ | $\mathcal{D} =$ |
|---|---|

2. Calculer les dérivées partielles premières et secondes de $g$ puis indiquer les fonctions trouvées :

| | |
|---|---|
| $\frac{\partial g}{\partial x} =$ | $\frac{\partial g}{\partial y} =$ |
| $\frac{\partial^2 g}{\partial x^2} =$ | $\frac{\partial^2 g}{\partial x \partial y} =$ |
| $\frac{\partial^2 g}{\partial y^2} =$ | |

3. Calculer l'équation du plan tangent à $g$ au point $(9, 1, -1)$ puis indiquer l'équation obtenue :

| z= |
|---|

4. Trouver les points critiques de $g$ et indiquer leur nature (maximum, minimum, selle, ..) en expliquant vos calculs.

**Exercice 5. :**

1. Calculer la valeur (exacte) de l'intégrale $\int_0^1 \operatorname{ch} x dx$ (on rapelle que $\operatorname{ch} x = \frac{e^x+e^{-x}}{2}$) :

$\int_0^1 \operatorname{ch} x dx =$

2. Calculer successivement les approximations $S_n^g$, $S_n^d$, $M_n$ et $T_n$ de cette intégrale pour $n = 5$. Dans chaque cas, on précisera si l'approximation surestime ou sous-estime la valeur exacte et on expliquera le signe de l'erreur à partir d'un dessin.

$S_n^g =$

$S_n^d =$

$M_n =$

$T_n =$

NOM :
PRENOM : GROUPE : .

**Exercice 6. :**

1. La fonction $h(x) = x + \frac{1}{x}$ possède un maximum et un minimum global dans l'intervalle $I = [0.5, 3]$. Expliquer pourquoi on peut l'affirmer même sans connaître les valeurs de la fonction.

2. Trouver ces deux extrema (exliquer votre méthode).

$$\boxed{\quad \le h(x) \le \quad}$$

3. Indiquer le meilleur majorant possible pour $|h'|$ sur l'intervalle $I$ (justifier) :

$$\boxed{|h'(x)| \le \quad}$$

4. En utilisant l'inégalité des accroissements finis sur l'intervalle $I$, et sachant que $h(1) = 1.5$, déduire une majoration de la valeur de $h(3)$. Comparer avec la valeur exacte et commenter.

**Exercice 7. :** Soit $f$ une fonction dont le développement limité (DL) à l'ordre 4 est

$$f(x) = 1 + \frac{3}{2}(x-2) - (x-2)^2 + \frac{1}{2}(x-2)^4 + (x-2)^4\varepsilon(x-2).$$

1. Utiliser l'unicité du DL et la formule de Taylor pour calculer les valeurs en $x_0 = 2$ de $f$, $f'$, $f''$, $f^{(3)}$, et $f^{(4)}$

| $f(2) =$ | $f'(2) =$ | $f''(2) =$ | $f^{(3)}(2) =$ | $f^{(4)}(2) =$ |
|---|---|---|---|---|

2. Quelles sont les approximations linéaire $L(x)$ et quadratique $Q(x)$ de $f$ en $x_0 = 2$ (donner les expressions développées) ?

| $L(x) =$ | $Q(x) =$ |
|---|---|

3. Tracer les graphes de ces deux approximations sur un même dessin.