NOM : Date : .
PRENOM : Groupe : .

Analyse : Feuille de réponses du TP 1
Approximation linéaire

On répondra aux questions posées aussi clairement que possible dans les espaces prévus et on remettra cette feuille de réponses en fin de TP à l'enseignant chargé du TP.

Rappel : On se souviendra que l'équation d'une droite de pente a et passant par le point (x_0, y_0) est $y = a(x - x_0) + y_0$ et donc celle d'une droite passant par les deux points (x_0, y_0) et (x_1, y_1) est $y = \frac{x_1 - x_0}{y_1 - y_0}(x - x_0) + y_0$.

Exercice 1. : Calculer la tangente à la courbe d'Agnesi[1] $f(x) = \frac{1}{1+x^2}$ au point $(-1, \frac{1}{2})$. Représenter la courbe et sa tangente (en vous servant de votre calculette graphique par exemple).

Exercice 2. : Trouver les points $(x, f(x))$ du graphe de $f(x) = x^3 - x^2 - x + 1$ où la tangente est horizontale.

[1]Maria Gaetana Agnesi, mathématicienne italienne, 1718-1799 (voir par exemple `http ://fr.wikipedia.org/Maria_Gaetana_Agnesi`).

Exercice 3. **:** En quels points de la courbe d'équation $f(x) = x\sqrt{x}$ la droite tangente est-elle parallèle à la droite d'équation $3x - y + 6 = 0$? Donner l'équation de la tangente à f en ce point.

Exercice 4. **:** Calculer la linéarisée $L(x)$ de $f(x) = x^3$ en $x_0 = 1$. Même question pour $f(x) = \sqrt[3]{x}$ en $x_0 = -8$.

Exercice 5. **:** Vérifier les approximations linéaires suivantes (calculées en $x = 0$) :

$$\sqrt{1+x} \simeq 1 + \frac{1}{2}x \quad , \quad \frac{1}{1+x} \simeq 1 - x$$

$$\sin x \simeq x \quad , \quad \cos x \simeq 1$$

$$e^x \simeq 1 + x \quad , \quad \ln(1+x) \simeq x$$

Exercice 6. : Trouver la linéarisée de $f(x) = \sqrt[3]{1+x}$ en $x = 0$ et l'utiliser pour calculer une valeur approchée de $\sqrt[3]{0,95}$ et de $\sqrt[3]{1,1}$. Comparer avec les valeurs données par votre calculatrice. Faites un dessin pour représenter l'erreur entre la valeur approchée calculée et la valeur exacte.

Exercice 7. : En commençant la suite par $x_0 = 2$, calculer les deux approximations suivantes x_1 et x_2 de la solution de $x^3 - 2x - 5 = 0$ obtenues par la méthode de Newton.

Même exercice pour $x^5 - 10 = 0$ avec $x_0 = 1,5$.

Exercice 8. **:** Pour calculer une racine carrée, disons la racine du nombre a, les Babiloniens utilisaient l'algorithme suivant : partir d'une première approximation x_0, puis l'améliorer pas à pas au moyen de la suite $x_{n+1} = \frac{1}{2}(x_n + \frac{a}{x_n})$. Comparer cet algorithme avec la méthode de Newton.

Exercice 9. **:** En commençant la suite par $x_0 = 0$, calculer les approximations suivantes de la solution de $e^x - 2x = 0$ obtenues par la méthode de Newton. Que pensez-vous des valeurs trouvées ? Que pouvez vous dire de la solution cherchée ?