

NOM :
PRENOM :

Date :
Groupe :

Analyse : Feuille de réponses du TP 12
Approximations quadratiques et formule de Taylor

On répondra aux questions posées dans les espaces prévus et on remettra cette feuille de réponses en fin de TP à l'enseignant chargé du TP.

Exercice 1. : Compléter le tableau suivant et en déduire les polynômes de Taylor d'ordre 1 à 4 en $x_0 = 1$ de la fonction $x \mapsto \sqrt{x+3}$.

n	$n = 0$	$n = 1$	$n = 2$	$n = 3$	$n = 4$
$f^{(n)}(x)$					$-\frac{15}{16}(x+3)^{-\frac{7}{2}}$
$f^{(n)}(x_0)$					
$\frac{f^{(n)}(x_0)}{n!}(x-x_0)^n$					

$P_1(x) =$

$P_2(x) =$

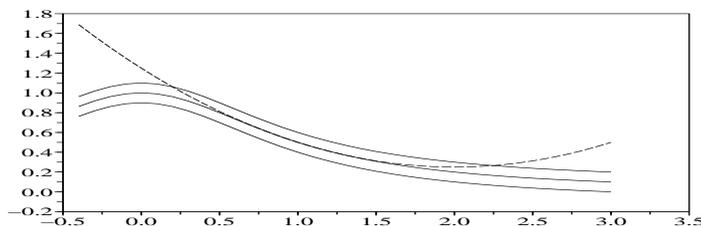
$P_3(x) =$

$P_4(x) =$

Exercice 2. : On dit que le polynôme de Taylor $P_n(x)$ de f en $x = x_0$ approxime la fonction $x \mapsto f(x)$ à ε près si $|f(x) - P_n(x)| \leq \varepsilon$, ce qui, pour $\varepsilon = 0.1$ revient à dire que

$$f(x) - 0.1 \leq P_n(x) \leq f(x) + 0.1 \quad (1)$$

On pose $f(x) = \frac{1}{1+x^2}$; donc $f'(x) = \frac{-2x}{(1+x^2)^2}$ et $f''(x) = \frac{2(3x^2-1)}{(1+x^2)^3}$. Pour $x_0 = 1$, on trouve $P_1(x) = 1 - \frac{1}{2}x$ et $P_2(x) = \frac{1}{4}(5 - 4x + x^2)$. La figure suivante représente les graphes des fonction f (en gras) $f + 0.1$ et $f - 0.1$ (en fin) et le polynôme de Taylor P_2 (en pointillés).



1. Déterminer visuellement un intervalle $[x_-, x_+]$ sur lequel P_2 approxime la fonction f à 0.1 près.

votre $x_- =$	votre $x_+ =$
---------------	---------------

2. pour trouver les x_- et x_+ les plus éloignés l'un de l'autre possible, quelle equation faut-il résoudre ?

votre équation :

3. Réduire l'équation à la forme d'un polynôme égal à 0.

équation réduite :

4. Utiliser les fonctions de résolution numérique de votre calculatrice pour trouver les meilleurs x_- et x_+ (approchés) :

$x_- \simeq$	$x_+ \simeq$
--------------	--------------

Exercice 3. : Soit f une fonction dont le développement limité (DL) à l'ordre 6 est

$$f(x) = 5 + 2(x - 1) + 4(x - 1)^3 - 2(x - 1)^6 + (x - 1)^6 \varepsilon(x - 1).$$

1. Utiliser l'unicité du DL et la formule de Taylor pour calculer les valeurs en $x_0 = 1$ de f , f' , f'' , $f^{(3)}$, et $f^{(4)}$

$f(1) =$	$f'(1) =$	$f''(1) =$	$f^{(3)}(1) =$	$f^{(4)}(1) =$
----------	-----------	------------	----------------	----------------

2. Quelles sont les approximation linéaire L et quadratiques Q de f en $x_0 = 1$. Tracer leur graphe sur une même figure.

$L(x) =$	$Q(x) =$
----------	----------

Exercice 4. : En utilisant les DL connus, calculer les DL à l'ordre 3 de

1. $f_1(x) = 2 \sin(x) - 4 \cos(x)$ en $x_0 = 0$

2. $f_2(x) = (e^x)^2$ en $x_0 = 0$

3. $f_3(x) = \cos(x - 3)$ en $x_0 = 3$

4. $f_4(x) = \ln(1 + x + 2x^2)$ en $x_0 = 0$

Exercice 5. : Calculer les limites suivantes

1. $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{1 - \cos(x)}{1 + x - e^x}$

2. $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sin(x) - x - \frac{1}{6}x^3}{x^5}$

3. $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\ln(1+x) - x + x^2}{\cos(x) - 1}$

4. $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\tan(x) - x}{4x^3}$