NOM : Date : .
PRENOM : Groupe : .

Analyse : Feuille de réponses du TP 4
Fonctions de deux variables : optimisation

On répondra aux questions posées aussi clairement que possible dans les espaces prévus et on remettra cette feuille de réponses en fin de TP à l'enseignant chargé du TP.

Exercice 1. :

1. Indiquer si la droite d'équation $y = \frac{1}{2}x - \frac{3}{2}$ rencontre le domaine $\mathcal{D} = [-1, \ 3] \times [\frac{1}{2}, \ 2]$ ou si celui-ci est situé dans l'un des demi plans qu'elle borde (faire un dessin).
2. Si x et y sont deux réels tels que $-1 \leq x \leq 3$ et $0,5 \leq y \leq 2$, l'inégalité $0,5x - y \geq 1,5$ est-elle toujours satisfaite ? En est-il de même pour l'inégalité $0,5x - y \geq 0,5$?
3. Etudier le signe de la fonction $f(x, y) = \frac{1}{2}x - y - \frac{3}{2}$ sur $\mathcal{D}$. Même question pour la fonction $g(x, y) = \frac{1}{2}x + y - \frac{3}{2}$.

Exercice 2. :

1. Vérifier par le calcul que le graphe de la fonction $f(x, y) = 4 - x^2 - y^2$ est situé au dessus de son plan tangent passant par le point $(1, 1, 2)$ (figure 2 du cours 2). Même question pour le plan tangent passant par le point (1,0,3).
2. Vérifier par le calcul que le graphe de la fonction $g(x, y) = x^2 + 3xy - y^2$ n'est pas situé au dessus du plan tangent passant par le point $(2, 3, 13)$. Cette fonction est-elle convexe ? concave ?

Exercice 3. : Trouver les points critiques de $f(x, y) = x^3 - 3xy + y^3$ et indiquer leur nature (maximum, minimum, selle, ..) . Même exercice pour $g(x, y) = \frac{x^2y-8x+y}{xy}$.

Exercice 4. : Trouver la plus petite et la plus grande valeur de la fonction $f(x,y)=x^2+y^2-xy+x+y$ sur le domaine $x\leq 0$, $y\leq 0$ et $x+y\geq -3$. Même exercice pour $g(x,y)=1+xy-x-y$ sur $x^2\leq y\leq 4$.

Exercice 5. (à rédiger sur une feuille séparée) : Montrer qu'une fonction $x\mapsto f(x)$ dérivable et concave sur $\mathbb{R}$ ne peut avoir qu'un seul point critique et qu'il s'agit alors forcément d'un maximum global. (Indication : on pourra utiliser le fait qu'une fonction strictement croissante s'annule au plus une fois). Enoncer le théorème analogue pour une fonction convexe.