NOM : Date : .
PRENOM : Groupe : .

Analyse : Feuille de réponses du TP 4
Inverse d'une fonction

Exercice 1. :

1. Calculer le domaine de définition, l'image et l'inverse de la fonction $x \mapsto 3 - 2x$. Même exercice pour les fonctions suivantes $x \mapsto \sqrt{x+1} + 2$, $x \mapsto \ln x + 2$, $x \mapsto \ln(x+2) + 1$.
2. La fonction $x \mapsto x^2 - 4x - 2$ n'est pas monotone. Il est donc possible de définir des inverses de plusieurs façons (une par intervalle où f est strictement monotone). Préciser quelles sont ces différentes fonctions inverses. Même exercice pour $x \mapsto \cos\sqrt{1 - x^2}$.
3. Donner les domaines de définition et les images des fonctions réciproques $x \mapsto x^3 - 6x^2 + 9x - 1$.

Exercice 2. :

1. Comparer la dérivée de exp en $x = 1$ et celle de ln en $x = e$. Expliquer sur un dessin.
2. Calculer la dérivée de arctan en $x = \sqrt{3}$; celle de $\operatorname{Arc}\sin$ en $x = -0,5$.
3. Soit g la fonction réciproque de $x \mapsto \cos x - 2x$. Calculer $g'(\pi)$. Faire un dessin.

Exercice 3. :

1. Calculer les dérivées premières et secondes des 3 fonctions hyperboliques.
2. Calculer l'équation de la droite tangente au graphe de $x \mapsto \operatorname{ch}(\sqrt{x})$ au point $x = 1$. Même question pour $\operatorname{Argth}(3x)$ au point $x = \frac{4}{5}$.
3. Utiliser la méthode de Newton pour calculer une valeur approchée de l'unique solution positive de l'équation $\operatorname{ch} 2x = 1 + \operatorname{sh} x$.

Exercice 4. :

1. On donne un intervalle I de $\mathbb{R}$ et une fonction f définie sur I. Formaliser l'énoncé :

$$(E) f \text{ est injective sur } I$$

2. Dans le cas où $f : x \mapsto x^2$, choisir deux intervalles I l'un pour lequel l'enoncé (E) est vrai et l'un pour lequel il est faux.
3. Dans le cas où $I = [0, 3[$, choisir deux fonctions f l'une pour laquelle l'enoncé (E) est vrai et l'autre pour laquelle il est faux.
4. Calculer la négation et la contraposée de l'énoncé (E).
5. On pourrait dire que f est *pseudo-injective* si elle vérifie

$$(\tilde{E}) \forall x, y \in I, f(x) \neq f(y) \Rightarrow x \neq y.$$

Calculer la contraposée de $(\tilde{E})$ et dire pourquoi cette définition est sans intérêt.