NOM : Date : .
PRENOM : Groupe : .

Analyse : Feuille de réponses du TP 6
Intégrales et primitives

On répondra aux questions posées dans les espaces prévus et on remettra cette feuille de réponses en fin de TP à l'enseignant chargé du TP. Les exercices supplémentaires ne sont à faire que par ceux qui ont terminé la feuille avant la fin de la séance.

Exercice 1. : Calcul d'aires avec une intégrale

1. L'intégrale $\int_1^2 (4-x)dx$ représente l'aire d'un trapèze. Faire un dessin puis calculer cette aire de deux façons différentes.

2. Dessiner la région du plan définie par les inégalités suivantes puis calculer son aire de deux façons différentes

$$|x| < 2 \ \ , \ \ |y| < 2 \ \ , \ \ 2x + 3y < 5$$

Exercice 2. :

1. Une fonction $f : [a, b] \to \mathbb{R}$ est une densité de probabilité si elle vérifie $f \geq 0$ et $\int_a^b f(x)dx = 1$. Vérifier que la fonction $f : [-1, 1] \to \mathbb{R}$ définie par $f(x) = \begin{cases} 1 - x & \text{si } x \geq 0 \\ x + 1 & \text{si } x < 0 \end{cases}$ est une densité de probabilité (tracer son graphe).

2. Sa fonction de répartition est définie par $F(x) = \int_{-1}^{x} f(t)dt (= \mathbb{P}(\{X \leq x\}))$. Soit $x_0 \in [-1, 1]$. Dessiner F puis calculer les intégrales suivantes en fonction de $f(x_0)$:

$\int_{x_0}^{1} f(x)dx =$

$\int_{0}^{x_0} f(x)dx =$

$\int_{-x_0}^{x_0} f(x)dx =$

Exercice 3. : Changement de variable

1. Sachant que $\cos 2x = 2\cos^2 x - 1$, calculer $\int_{-\frac{\pi}{6}}^{\frac{\pi}{6}} \cos^2 x dx$.

Calculer, en utilisant le changement de variable $t = \sin x$, l'intégrale $\int_{\frac{-1}{2}}^{\frac{1}{2}} \sqrt{1-t^2} dt$.

Exercice 4 : entrainement à la démonstration : Soit $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ continue, soit $a \in \mathbb{R}$. Montrer que si f est impaire alors $\int_{-a}^{a} f(x)dx = 0$.

Exercices suplémentaires :

1. Dessiner la région du plan définie par les inégalités suivantes puis calculer son aire : $x > 0$, $y > 0$ et $(y+1)e^x < 3$.
2. Pour la densité f de l'exercice 2, calculer les deux intégrales suivantes qui représentent l'espérance et la variance d'une "variable aléatoire X" ayant cette densité, $\mathbb{E}X = \int_{-1}^{+1} xf(x)dx$ et $\operatorname{Var} X = \int_{-1}^{+1} x^2 f(x)dx$.
3. Calculer $\int_1^2 \frac{\ln s}{s^2} ds$ au moyen du changement de variable $s = e^t$.
4. Calculer par intégration par partie les primitives de $f(x) = x \sin x$, $g(x) = x \operatorname{ch} x$ et de $h(x) = x^2 e^x$.
5. On appelle "fonction d'erreur" la fonction définie par $\operatorname{erf}(t) = \frac{2}{\sqrt{\pi}} \int_0^t \exp(-x^2)dx$. Exprimer les intégrales suivantes $\frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_0^t \exp(-x^2/2)dx$, $\frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_0^t x \exp(-x^2/2)dx$ et $\frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_0^t x^2 \exp(-x^2/2)dx$ (que l'on appelle des *intégrales gaussiennes*) en fonction de la fonction d'erreur.