NOM :
PRENOM :

Date :
Groupe :

Corrigé

Analyse : Feuille de réponses du TP 1
Approximation linéaire

On répondra aux questions posées aussi clairement que possible dans les espaces prévus et on remettra cette feuille de réponses en fin de TP à l'enseignant chargé du TP.

Rappel : On se souviendra que l'équation d'une droite de pente a et passant par le point (x_0, y_0) est $y = a(x - x_0) + y_0$ et donc celle d'une droite passant par les deux points (x_0, y_0) et (x_1, y_1) est $y = \frac{x_1 - x_0}{y_1 - y_0}(x - x_0) + y_0$.

Exercice 1. : Calculer la tangente à la courbe d'Agnesi[1] $f(x) = \frac{1}{1+x^2}$ au point $(-1, \frac{1}{2})$. Représenter la courbe et sa tangente (en vous servant de votre calculette graphique par exemple).

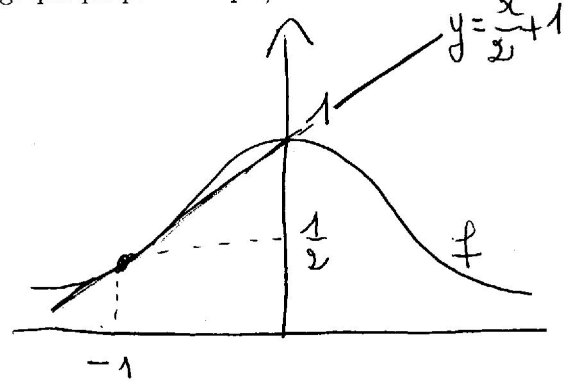
$f(x) = \frac{1}{1+x^2}$ $\quad f(-1) = \frac{1}{2}$

$f'(x) = \frac{-2x}{(1+x^2)^2}$ $\quad f'(-1) = \frac{1}{2}$

Equation de la tangente :

$y = f(-1) + f'(-1)(x - (-1))$

$y = \frac{1}{2} + \frac{1}{2}(x+1) = \frac{x}{2} + 1$



Exercice 2. : Trouver les points $(x, f(x))$ du graphe de $f(x) = x^3 - x^2 - x + 1$ où la tangente est horizontale.

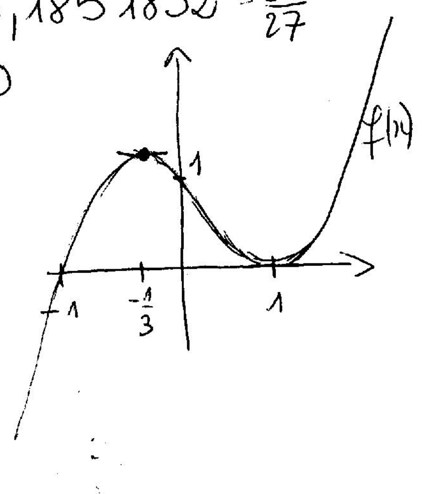
$f'(x) = 3x^2 - 2x - 1 = 3(x + \frac{1}{3})(x - 1)$

Donc $f' = 0$ au point $x = -\frac{1}{3}$ et au point $x = 1$

En ces points f vaut : $f(-\frac{1}{3}) = 1{,}1851852 = \frac{32}{27}$

$f(1) = 0$

Les deux points cherchés sont donc $(-\frac{1}{3}, \frac{32}{27})$ et $(1, 0)$.



[1]Maria Gaetana Agnesi, mathématicienne italienne, 1718-1799
(voir par exemple http ://fr.wikipedia.org/Maria_Gaetana_Agnesi).

Exercice 3. : En quels points de la courbe d'équation $f(x) = x\sqrt{x}$ la droite tangente est-elle parallèle à la droite d'équation $3x - y + 6 = 0$? Donner l'équation de la tangente à f en ce point.

La pente de la droite $y = 3x + 6$ est 3. Comme $f(x) = x^{3/2}$, on a $f'(x) = \frac{3}{2}\sqrt{x}$.

On a $f'(x) = 3 \iff \frac{3}{2}\sqrt{x} = 3 \iff x = 4$

Au point $(x = 4,\ f(x) = 8)$, l'équation de la tangente est

$y = f(4) + f'(4)(x-4) = 8 + 3(x-4)$

Donc cette tangente a pour équation $\boxed{y = 3x - 4}$

Exercice 4. : Calculer la linéarisée $L(x)$ de $f(x) = x^3$ en $x_0 = 1$. Même question pour $f(x) = \sqrt[3]{x}$ en $x_0 = -8$.

On utilise la définition $L(x) = f(x_0) + f'(x_0)(x - x_0)$

Donc pour $f(x) = x^3$ et $x_0 = 1$, $f(x_0) = 1$ $f'(x) = 3x^2\Big|_{x=x_0} = 3$

D'où $L(x) = 1 + 3(x-1) = 3x - 2$ $\boxed{L(x) = 3x - 2}$

Pour $f(x) = \sqrt[3]{x}$ et $x_0 = -8$ $f(-8) = -2$ $f'(x) = \frac{1}{3}x^{-2/3}$

d'où $f'(-8) = \frac{1}{3}\left(\frac{1}{(x^{1/3})^2}\right)\Big|_{x=-8} = \frac{1}{12}$

Donc $L(x) = -2 + \frac{1}{12}(x + 8) = \frac{1}{12}x - \frac{4}{3}$ $\boxed{L(x) = \frac{1}{12}x - \frac{4}{3}}$

Exercice 5. : Vérifier les approximations linéaires suivantes (calculées en $x = 0$) :

$$\sqrt{1+x} \simeq 1 + \frac{1}{2}x \quad , \quad \frac{1}{1+x} \simeq 1 - x$$

$$\sin x \simeq x \quad , \quad \cos x \simeq 1$$

$$e^x \simeq 1 + x \quad , \quad \ln(1+x) \simeq x$$

- $f(x) = \sqrt{1+x}$, $f(0) = 1$; $f'(x) = \frac{1}{2\sqrt{1+x}}$, $f'(0) = 1/2$; $L(x) = 1 + \frac{1}{2}(x - 0)$
- $f(x) = \frac{1}{1+x}$, $f(0) = 1$; $f'(x) = \frac{-1}{1+x}$, $f'(0) = -1$; $L(x) = 1 - 1(x)$
- $f(x) = \sin x$, $f(0) = 0$; $f'(x) = \cos x$, $f'(0) = 1$; $L(x) = 0 + 1.x$
- $f(x) = \cos x$, $f(0) = 1$; $f'(x) = -\sin x$, $f'(0) = 0$; $L(x) = 1 + 0.x$
- $f(x) = e^x$, $f(0) = 1$; $f'(x) = e^x$, $f'(0) = 1$; $L(x) = 1 + 1.x$
- $f(x) = \ln(1+x)$, $f(0) = 0$; $f'(x) = \frac{1}{1+x}$, $f'(0) = 1$; $L(x) = 0 + 1.x$

Exercice 6. : Trouver la linéarisée de $f(x) = \sqrt[3]{1+x}$ en $x = 0$ et l'utiliser pour calculer une valeur approchée de $\sqrt[3]{0,95}$ et de $\sqrt[3]{1,1}$. Comparer avec les valeurs données par votre calculatrice. Faites un dessin pour représenter l'erreur entre la valeur approchée calculée et la valeur exacte.

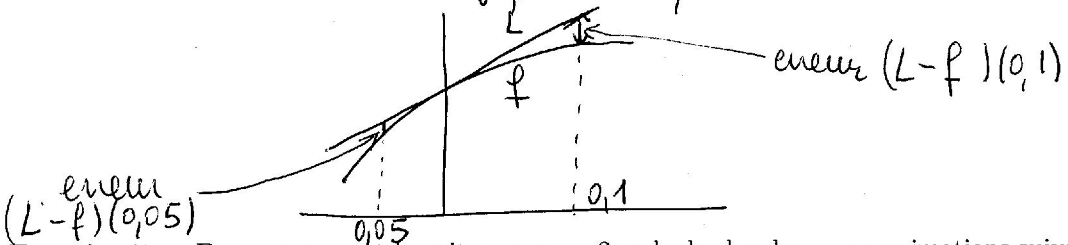
$f(x) = \sqrt[3]{1+x}$ $\quad f'(x) = \frac{1}{3}\frac{1}{(1+x)^{2/3}}$ $\quad L(x) = 1 + \frac{1}{3}x$

$f(0) = 1$ $\quad f'(0) = \frac{1}{3}$

$\sqrt[3]{0,95} = f(-0,05)$ $\quad L(-0,05) = 1 - \frac{0,05}{3} \approx 0,9833$ d'où $\sqrt[3]{0,95} \simeq 0,9833$

$\sqrt[3]{1,1} = f(0,1)$ $\quad L(0,1) = 1 + \frac{0,1}{3} \approx 1,033$ d'où $\sqrt[3]{1,1} \simeq 1,033$

Pour la calculatrice $\sqrt[3]{0,95} = 0,9830476$ et $\sqrt[3]{1,1} = 1,0322801$



Exercice 7. : En commençant la suite par $x_0 = 2$, calculer les deux approximations suivantes x_1 et x_2 de la solution de $x^3 - 2x - 5 = 0$ obtenues par la méthode de Newton.

Même exercice pour $x^5 - 10 = 0$ avec $x_0 = 1,5$.

$x_0 = 2$ $\quad f(x) = x^3 - 2x - 5$ $\quad f(x_0) = 8 - 4 - 5 = -1$

$f'(x) = 3x^2 - 2$ $\quad f'(x_0) = 12 - 2 = 10$

$x_1 = 2 - \frac{(-1)}{10} = 2,1$ $\quad f(x_1) = 0,061$

$f'(x_1) = 11,23$

$x_2 = 2,1 - \frac{(0,061)}{11,23} = 2,0945681$ _ D'où $x_0 = 2$, $x_1 = 2,1$, $x_2 \simeq 2,09$

$x_0 = 1,5$ $\quad f(x) = x^5 - 10$ $\quad f(1,5) = -2,40625$

$f'(x) = 5x^4$ $\quad f'(1,5) = 25,3125$

$x_1 = 1,5 - \frac{-2,40625}{25,3125}$

$x_1 = 1,5950617$ $\quad f(x_1) = 0,3249385$

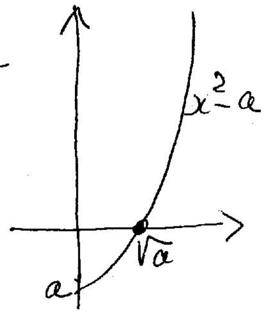
$f'(x_1) = 32,365326$

$x_2 = 1,585022$

Donc le début de la suite est $(1,5 ; 1,595 ; 1,585 ; \ldots)$

et la "vraie" valeur de $\sqrt[5]{10}$ est $1,5848932$.

Exercice 8. : Pour calculer une racine carrée, disons la racine du nombre a, les Babiloniens utilisaient l'algorithme suivant : partir d'une première approximation x_0, puis l'améliorer pas à pas au moyen de la suite $x_{n+1} = \frac{1}{2}(x_n + \frac{a}{x_n})$. Comparer cet algorithme avec la méthode de Newton.



$\sqrt{a}$ est le zéro positif de la fonction $f(x) = x^2 - a$

Pour trouver une valeur approchée par la méthode de Newton, on calcule $f'(x) = 2x$

puis $\begin{cases} x_0 \\ x_{n+1} = x_n - \dfrac{f(x_n)}{f'(x_n)} \end{cases}$ donc

$$x_{n+1} = x_n - \frac{x_n^2 - a}{2x_n} = x_n - \frac{x_n}{2} + \frac{a}{2x_n} = \frac{1}{2}\left(x_n + \frac{a}{x_n}\right)$$

On retrouve donc exactement dans ce cas l'algorithme des Babyloniens.

Exercice 9. : En commençant la suite par $x_0 = 0$, calculer les approximations suivantes de la solution de $e^x - 2x = 0$ obtenues par la méthode de Newton. Que pensez-vous des valeurs trouvées ? Que pouvez vous dire de la solution cherchée ?

Comme $f(x) = e^x - 2x$, $f'(x) = e^x - 2$, on a donc

$$x_0 = 0 \qquad x_1 = 0 - \frac{e^0 - 0}{e^0 - 2} = 1$$

$$x_2 = 1 - \frac{e-2}{e-2} = 0$$

La suite (x_n) définie par $\begin{cases} x_0 = 0 \\ x_{n+1} = x_n - \dfrac{f(x_n)}{f'(x_n)} \end{cases}$

est donc, dans ce cas, la suite périodique $0, 1, 0, 1, 0, 1, \ldots$

En particulier elle n'est pas convergente.

Quoiqu'il en soit une étude rapide de la fonction f montre qu'elle est strictement positive et donc qu'elle

x	$-\infty$		$\ln 2$		$+\infty$
f	$+\infty$	$\searrow$	$2(1-\ln 2)$	$\nearrow$	$+\infty$

n'a pas de zéro.