NOM : Date : .

PRENOM : Groupe : .

Analyse : Feuille de réponses du TP 11
Limites et continuité

On répondra aux questions posées dans les espaces prévus et on remettra cette feuille de réponses en fin de TP à l'enseignant chargé du TP.

Exercice 1. : En utilisant la négation de la définition de la limite :
$\forall \varepsilon > 0 \ \exists \delta > 0 \quad |x-a| < \delta \ \Rightarrow \ |f(x) - L| < \varepsilon$, montrer que la limite $\lim_{x\to 3}(2x-1)$ n'est pas égale à 6. En déduire que la fonction $f(x) = \begin{cases} 2x-1 & \text{si } x \neq 3 \\ 6 & \text{si } x = 3 \end{cases}$ n'est pas continue en $x = 3$.

. Négation : $\exists \varepsilon > 0, \forall \delta > 0, \exists x \ |x-a| < \varepsilon$ et $|f(x) - L| \geq \varepsilon$

. Posons $g(x) = 2x - 1$. Montrons que $\lim_{x\to 3} g(x) \neq 6$

Pour cela, il faut trouver une valeur de ε et une valeur de x qui conviennent.

$|g(x) - 6| = |2x - 7|$. En $x = 3$ $|2x - 7| = 1 \geq \varepsilon$

Si on choisit $\varepsilon = \frac{1}{2}$, alors $\forall \eta > 0$, $\exists x = 3$, $|x-3| = 0 < \eta$

et $|g(x) - 6| = 1 \geq \varepsilon$ donc $\lim_{x\to 3} g(x)$ ne vaut pas 6.

Si f était continue, alors on aurait $\lim_{x\to 3} g(x) = 6$

Or on vient de montrer le contraire, donc f n'est pas continue

Exercice 2. : Montrer avec la définition $(\varepsilon - \delta)$ que $\lim_{x\to -5}(4 - \frac{3x}{5}) = 7$ et illustrer votre preuve à l'aide d'un dessin comme celui du cours.

Pour montrer que $\lim_{x\to -5}(4 - \frac{3}{5}x) = 7$, il faut trouver une valeur de δ pouvant dépendre de ε vérifiant la définition de la limite.

$|4 - \frac{3x}{5} - 7| = |-\frac{3x}{5} - 3| < \varepsilon \iff |x+3| < \frac{5\varepsilon}{3}$

Soit $\varepsilon > 0$, en posant $\delta = \frac{5\varepsilon}{3}$, pour montrer que $\lim_{x\to -5}(4 - \frac{3x}{5}) = 7$

il suffit de montrer que si $|x+3| < \eta$ alors $|f(x) - 7| < \varepsilon$ (où $f(x) = 4 - \frac{3x}{5}$)

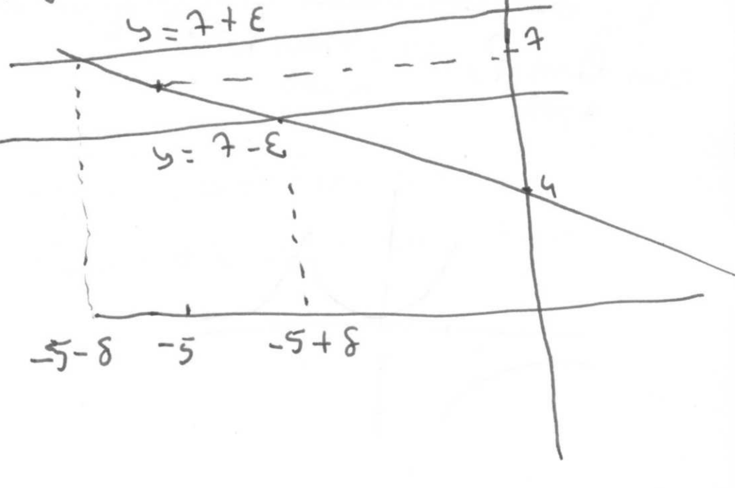
Soit x tel que $|x+3| < \eta$

alors $|f(x) - 7| = |-\frac{3x}{5} - 3|$

$= \frac{3}{5}|x+3|$

$\leq \frac{\cancel{3}}{\cancel{5}} \times \frac{\cancel{5}}{\cancel{3}} \varepsilon$

$\leq \varepsilon$



Exercice 3. : Soit f la fonction définie par

$$f(x) = \begin{cases} \frac{x^2-4}{x-2} & \text{si } x \neq 2 \\ L & \text{si } x = 2 \end{cases}$$

Quel est le domaine de définition de f. Choisir la valeur de L de telle sorte que f soit continue sur son domaine. Tracer son graphe.

- f est définie sur $\mathbb{R}$
- Cherchons la valeur de L telle que $f(x)$ soit continue en $x=2$

$$\lim_{x \overset{<}{\to} 2} \frac{x^2-4}{x-2} = \lim_{x \overset{<}{\to} 2} \frac{(x+2)(x-2)}{(x-2)} = \lim_{x \overset{<}{\to} 2} (x+2) = 4.$$

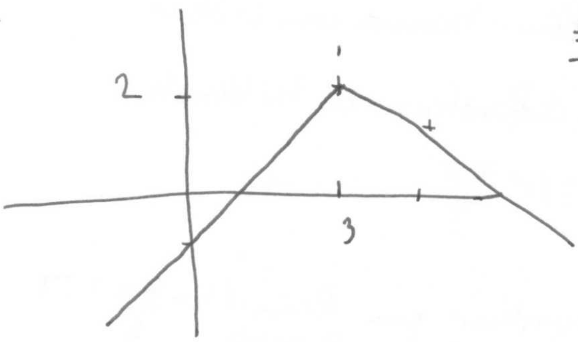
$$\lim_{x \overset{>}{\to} 2} \frac{x^2-4}{x-2} = \lim_{x \overset{>}{\to} 2} (x+2) = 4.$$

D'où pour $L=4$ la fonction f est continue.

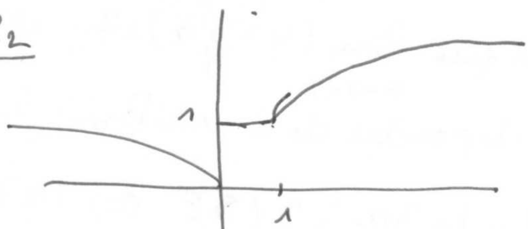
Exercice 4. : Esquisser les graphes des fonctions suivantes. Sont-elles continues ? Sinon, indiquer si, aux points de discontinuité, elles sont continues à droite, à gauche...

$$f_1(x) = \begin{cases} x-1 & \text{si } x < 3 \\ 5-x & \text{si } x \geq 3 \end{cases} \quad f_2(x) = \begin{cases} \sqrt{-x} & \text{si } x < 0 \\ 1 & \text{si } 0 \leq x \leq 1 \\ \sqrt{x} & \text{si } x > 1 \end{cases} \quad f_3(x) = \begin{cases} \frac{1}{x} & \text{si } x < -1 \\ x^2 & \text{si } -1 \leq x \leq 1 \\ \frac{1}{x^2} & \text{si } x > 1 \end{cases}$$

f_1



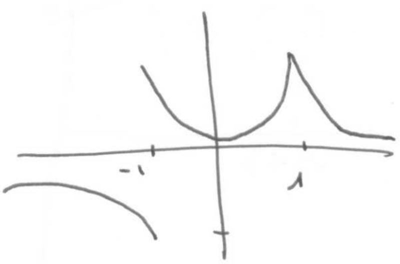
f_2



f_1 est continue car $\lim_{x \overset{<}{\to} 3} f_1(x) = \lim_{x \overset{>}{\to} 3} f_1(x) = 2$

$\left.\begin{array}{l} \lim_{x \overset{<}{\to} 0} f_2(x) = 0 \\ \lim_{x \overset{>}{\to} 0} f_2(x) = 1 \end{array}\right\}$ f_2 est continue à droite en 0 car $f(0) = 1$.

f_2 est continue en $x = 1$



f_3 est continue en 1 car $\lim_{x \overset{>}{\to} 1} f_3 = \lim_{x \overset{<}{\to} 1} f_3 = 1$

En $x = -1$

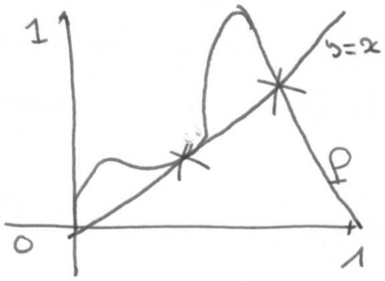
$\lim_{x \overset{<}{\to} -1} f_3(x) = \lim_{x \overset{<}{\to} -1} \frac{1}{x} = -1$

$\lim_{x \overset{>}{\to} -1} f_3(x) = \lim_{x \overset{>}{\to} -1} x^2 = 1$

f_3 est continue à droite en $x = -1$.

Exercice 5. : théorème du point fixe

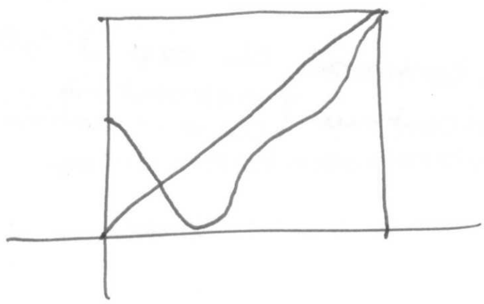
1. Tracer le graphe d'une fonction continue définie sur l'intervalle $[0, 1]$ à valeurs dans l'intervalle $[0, 1]$ et indiquer sur le dessin où sont ses points fixes.



X : Point fixe

Les points fixes (solutions de $f(x) = x$) sont les points d'intersection de la courbe de f et de la droite d'équation $y = x$.

2. Tenter de dessiner à présent le graphe d'une fonction f de $[0, 1]$ dans $[0, 1]$ n'ayant aucun point fixe. Quel est l'obstacle ?



On ne peut pas dessiner une telle fonction
Quelle que soit la fonction tracée, elle coupe la droite d'équation $y = x$ et admet donc au moins un point fixe

3. Utiliser le théorème des valeurs intermédiaires appliqué à la fonction $g(x) = f(x) - x$ pour montrer qu'une fonction continue de $[0, 1]$ dans $[0, 1]$ a nécessairement un point fixe au moins.

$f(x)$ est continue donc g est continue (somme de fonctions continues)

$0 \leq f(x) \leq 1$

$-1 \leq f(x) - x \leq 1$

D'après le théorème des valeurs intermédiaires, il existe $c \in [0;1]$ tel que $g(c) = 0$

c'est à dire $f(c) - c = 0$

c vérifie donc $f(c) = c$ et est un point fixe de f.

Une fonction f continue de $[0;1]$ dans $[0;1]$ admet donc au moins un point fixe.

Exercice 6. Indiquer le domaine de définition des fonctions suivantes et montrer qu'elles sont continues sur leur domaine en les explicitant au moyen de fonctions usuelles et d'opérations :

$f_1(x) = \ln x + \sqrt{25 - x^2}$

ln est défini sur $\mathbb{R}^{+*}$
$\sqrt{25-x^2}$ est défini sur $[-5;5]$ } $D_f =]0;5]$

$\sqrt{25-x^2}$ est continu comme composée d'applications continues.

f est continue comme somme de fonction continues

$f_2(x) = (x^2 + x + 1)^{\frac{3}{2}}$

$f_2(x) = \sqrt{(x^2+x+1)^3}$ $\quad (x^2+x+1) \geq 0$ d'où $D_f = \mathbb{R}$.

f est continue comme composée de fonctions continues.

$f_3(x) = \exp(\frac{1}{\sqrt{x+1}})$

Pour que f soit définie il faut $\begin{cases} x+1 \geq 0 \\ \text{et} \\ \sqrt{x+1} \neq 0 \end{cases}$ c.à.d $\begin{cases} x \geq -1 \\ x \neq -1 \end{cases}$

d'où $D_f =]-1;+\infty[$

f_3 est continue car f_3 est la composée de exp et $g(x) = \frac{1}{\sqrt{x+1}}$ qui sont 2 fonctions continues (g est continue (car $x+1$ continue, $\sqrt{\ }$ continue et $\frac{1}{a}$ continue)

Exercice 7. Par chaque fonctions déterminer l'image de l'intervalle $[a, b]$ et le comparer avec $[f(a), f(b)]$:

$g_1(x) = \sin x$, $[a, b] = [0, 2\pi]$

$\text{Im}\, g_1 = [-1;1]$.

$[g_1(0);g_1(2\pi)] = [0;0]$

$\text{Im}\, g_1 \neq [g_1(0);g_1(2\pi)]$

$$g_2(x) = \begin{cases} x - 1 & \text{si } x < 3 \\ 5 - x & \text{si } x \geq 3 \end{cases}, \ [a, b] = [1, 4].$$

$\text{Im}\, g_2 = [0;2]$.

$[g_2(1);g_2(4)] = [0;1] \neq \text{Im}\, g_2$

$$g_3(x) = \begin{cases} \frac{1}{x} & \text{si } x \neq 0 \\ 0 & \text{si } x = 0 \end{cases}, \ [a, b] = [-1, 2].$$

$\text{Im}\, g_3 =]-\infty;+\infty[$.

$[g_3(-1);g_3(2)] = [-1;\frac{1}{2}]$.